Notion de limite

Prof :Maatallah 18/ 10 / 2023 *Classe : 3 Tech*

Limite d'une fonction à l'infinie

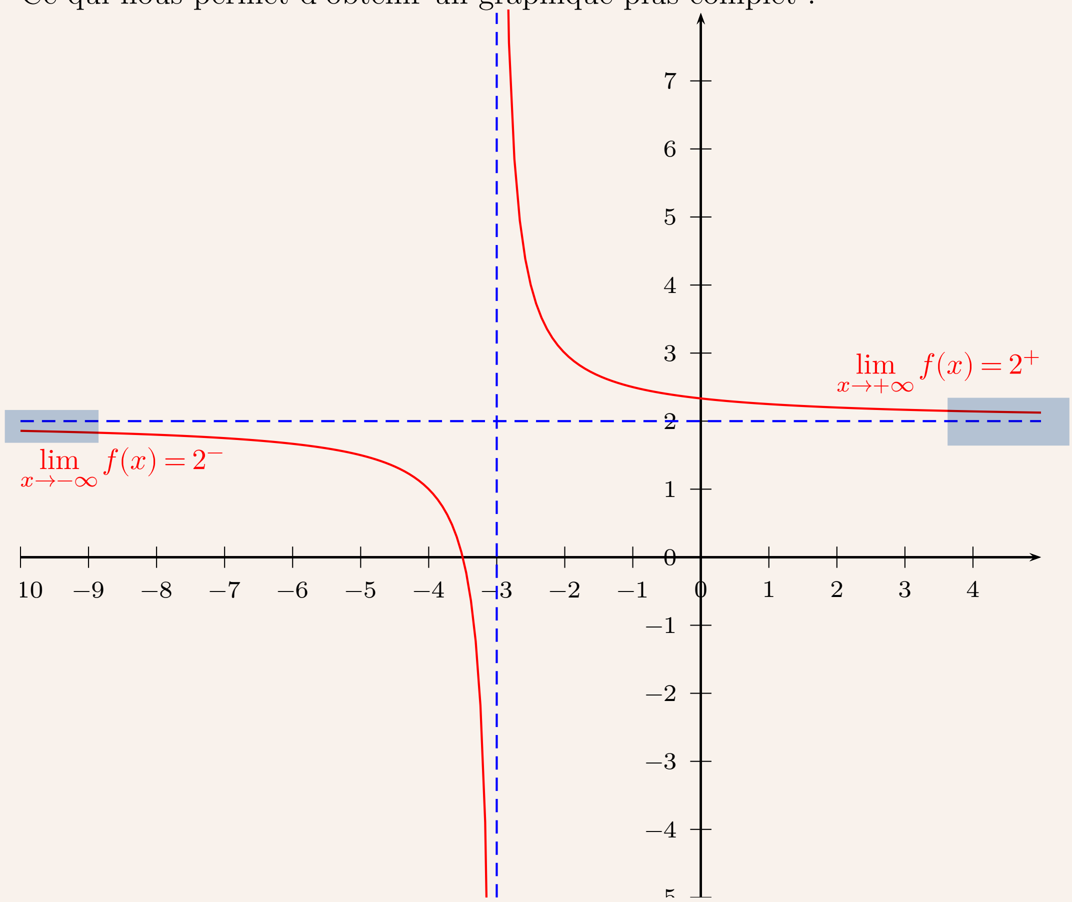
Activité n 1

On cobnsidère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$ par $f(x)=\dfrac{1}{x+3}+2$ On construire un tableau avec de grandes valeurs en valeur absolue :

x	-10^4	-10^3	-10^2	-10	10	10^2	10^3	10^4
$f(x)$	1,9999	1,9990	1,989	1,8571	2,0769	2,0097	2,0010	2,0001

On remarque que plus on se rapproche de $\pm\infty$, plus les valeurs de $f(x)$ se rapprochent de 2 . On note $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2}$ et $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2}$

Ce qui nous permet d'obtenir un graphique plus complet :



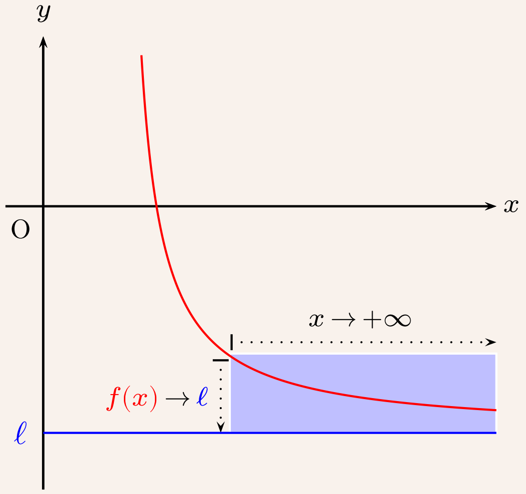
Définition 1

a est un nombre réel. Soit f une fonction définie sur au moins $]a;+\infty[$ (respectivement $]-\infty,a[$). Lorsque le réel x prend des valeurs de plus en plus grandes vers $+\infty$, (respectivement vers $-\infty$), si les nombres $f(x)$ deviennent de plus proches d'une réel ℓ, on dit que $f(x)$ a pour **limite** ℓ en $+\infty$ (respectivement vers $-\infty$). On note :

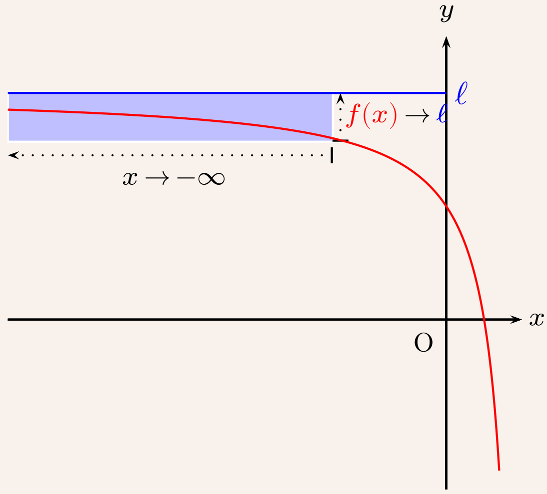
$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x)=\ell} \quad \text{et} \quad \boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=\ell}$$

Définition 2

On dit que la droite d'équation $\boxed{y=\ell}$ est une **asymptote horizontale** à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$.



$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$$



$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell$$

Limites en l'infini des fonctions de référence

$f(x)$	$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$\dfrac{1}{x^2}$	$\dfrac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$
Limite en $+\infty$	0	0	0	0
Limite en $-\infty$	0	×	0	0

Limite infinie d'une fonction en l'infini

Soit f une fonction définie au moins sur $]a;+\infty[$ (respectivement $]-\infty;a[$). Lorsque le réel x prend des valeurs de plus en plus grandes vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$), si les nombres $f(x)$ deviennent de plus en plus

- ➔ grands, on dit que f a pour **limite** $+\infty$ en $+\infty$ (resp. $-\infty$) et on note :

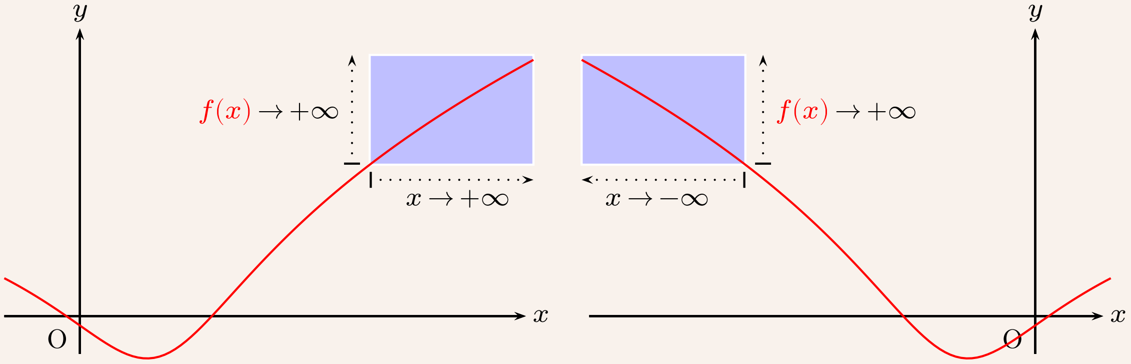
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad (\text{resp. } \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty)$$

- ➔ grands en valeur absolue et négatifs, on dit que f a pour **limite** $-\infty$ en $+\infty$ (respectivement $-\infty$) et on note :

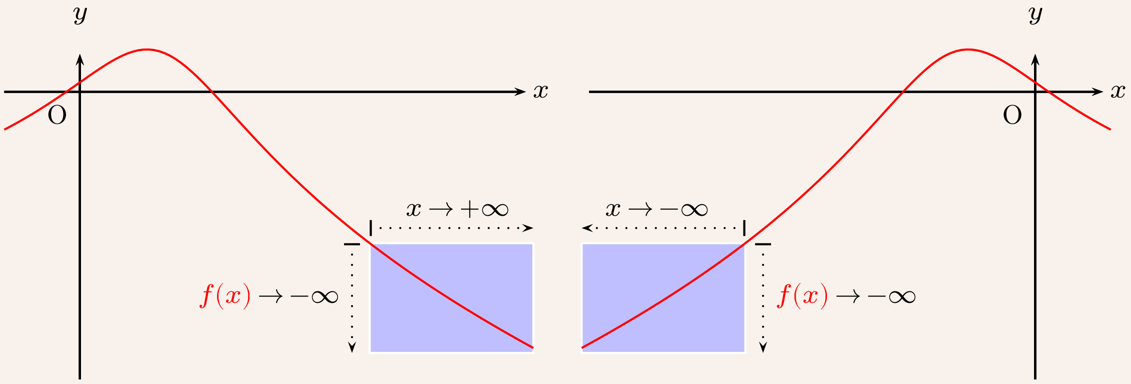
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \quad (\text{resp. } \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty)$$

$f(x)$	$\sqrt{x}$	x^2	x^n, $n \in \mathbb{N}^*$
Limite en $+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
Limite en $-\infty$	×	$+\infty$	$+\infty$ si n pair $-\infty$ si n impair

Exemple (Graphique)

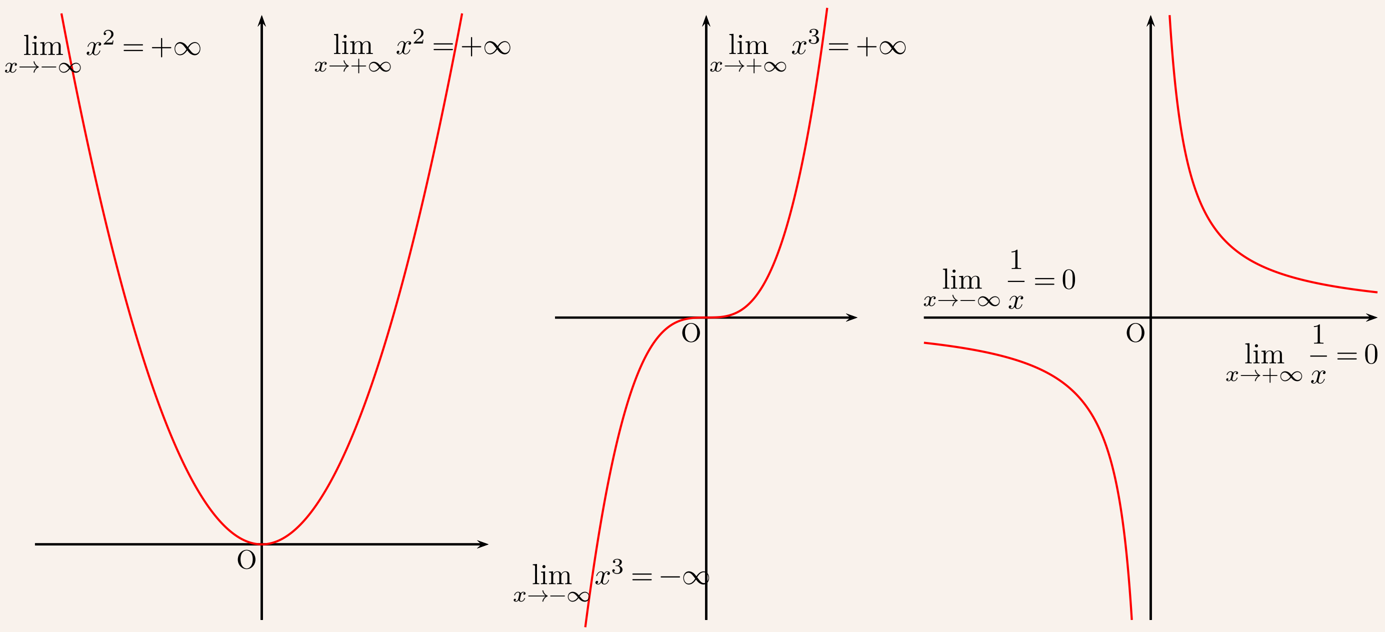


$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$



$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Limites des fonctions usuelles



fonction carré fonction cube fonction inverse

.

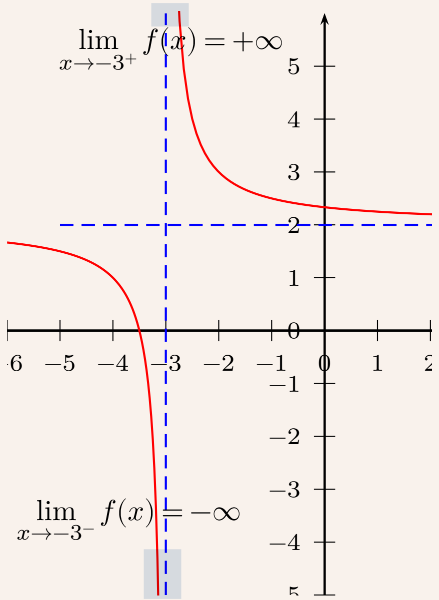
Limites infinie d'une fonction en un point

Activité n 2

On considère la fonction f, définie pour tout $x \neq 3$ par $f(x) = \dfrac{1}{x+3} + 2 = \dfrac{2x+7}{x+3}$.
la fonction n'est pas définie pour $x = -3$ Il nous faut construire un tableau plus précis avec des valeurs proches de -3 :

x	$-3{,}1$	$-3{,}01$	$-3{,}001$	$-3{,}0001$	$-2{,}9999$	$-2{,}999$	$-2{,}99$	$-2{,}9$
$f(x)$	-8	-98	-998	-9998	10002	1002	102	12

On remarque que plus on se rapproche de -3, plus la courbe prend de grandes valeurs . On note $\boxed{\lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = -\infty}$ et $\boxed{\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = +\infty}$.



Définition 3

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de la forme $]a;b]$ ou $[b;a[$ où a et b sont des réels. Lorsque le réel x s'approche de a, si les nombres $f(x)$ deviennent de plus en plus

- ➔ grands, on dit que f a pour **limite** $+\infty$ en a et on note :

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

- ➔ grands en valeur absolue, mais négatifs, on dit que f a pour **limite** $-\infty$ en a et on note :

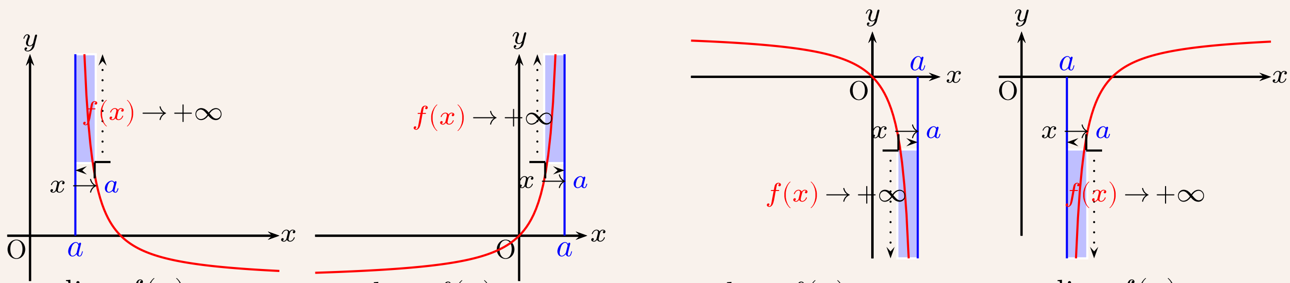
$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

Remarque

Lorsque le fonction n'est pas définie en a, on précise si on s'en approche

- ➔ par valeurs inférieures : $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$;
- ➔ par valeurs supérieurs : $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$.

Interprétation graphique



$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

Définition 4

Dans le cas où la limite en a vaut $\pm\infty$, on dit que la droite d'équation $x = a$ est une **asymptote verticale** à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$.

Exercice n 1

Déduire de chacune des limites suivantes, si possible, l'équation d'une asymptote verticale ou horizontale à la courbe représentative de la fonction f.

a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$ **b** $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = -\infty$ **c** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -6$ **d** $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$

e $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ **f** $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$ **g** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ **Réponse** ....

....

....

....

....

....

....

....

....

Exercice n 2

Déterminer les limites aux bornes de son ensemble de définition de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1. f définie sur $]2;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 6}{x - 2}$

2. f définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{-2x^2 + x - 3}{x(x-1)}$

Réponse ....

....

....

....

....

....

....

Opérations sur les limites

Définition : Limite d'une somme

Limite de f	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Limite de g	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Limite de $f+g$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	×

Limite d'un produit

Limite de f	l	$l>0$	$l<0$	$l>0$	$l<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
Limite de g	l'	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
Limite de fg	ll'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	×

Limite d'un quotient

Limite de f	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
Limite de g	$l'\neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	$l'>0$	$l'<0$	$l'>0$	$l'<0$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
Limite de $\frac{f}{g}$	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	×	×

Exercice n 3

- Dans chacun des cas suivants , déterminer la limite de la fonction f en x_0.

  $f(x)=-3x^3+2x^2-x+4$, $x_0=0$ $\qquad$ $f(x)=\dfrac{-3x^3+2x^2-x+4}{x^2-x+4}$, $x_0=1$

  $f(x)=\dfrac{x^2+x}{x-1}$, $x_0=1^-$ $\qquad$ $f(x)=\dfrac{x^2+2x+2}{x-2}$, $x_0=2^+$

- Calculer les limites suivantes :

  $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3-8x^2+11x+13$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4}{x^2+3x+24}$

Réponse ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Formes indeterminées

Les formes indéterminées nécessitent une étude particulière. Elles sont au nombre de quatre :

$$"+\infty-\infty" \qquad "0\times\infty" \qquad "\frac{\infty}{\infty}" \qquad "\frac{0}{0}"$$

Règle 1

Au voisinage de $+\infty$ ou de $-\infty$, une fonction polynôme à la même limite que son monôme de plus haut degré.

exemple

$$\lim_{x\to+\infty} -3x^3-2x^2+x-5 = \lim_{x\to+\infty} -3x^3 = -\infty$$

Règle 2

Au voisinage de $+\infty$ ou de $-\infty$, une fonction rationnelle à la même limite que le quotient du monôme de plus haut degré du numérateur par le monôme de plus haut degré du dénominateur.

exemple

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{5x^2-2x^3}{3x^4+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x^3}{3x^4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2}{3x} = 0$$

Exercice n 4

Determiner les limites suivantes :

a $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^5-6x^4+3x^2-12)$ **b** $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^3+x+3)$ **c** $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{9x+2}{3x-7}$ **d** $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{9x^2+2x}{3x^3-7}$

e $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{9x+2}{x-3}}$ **f** $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{9x+2}{x-3}}$ **g** $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2-x+\frac{1}{x^2}\right)$ **h** $\lim\limits_{x\to0^-} \left(x^2-x+\frac{1}{x^2}\right)$

Réponse ....
....
....
....
....
....
....
....

Exercice n 5

Calculer les limites suivantes :

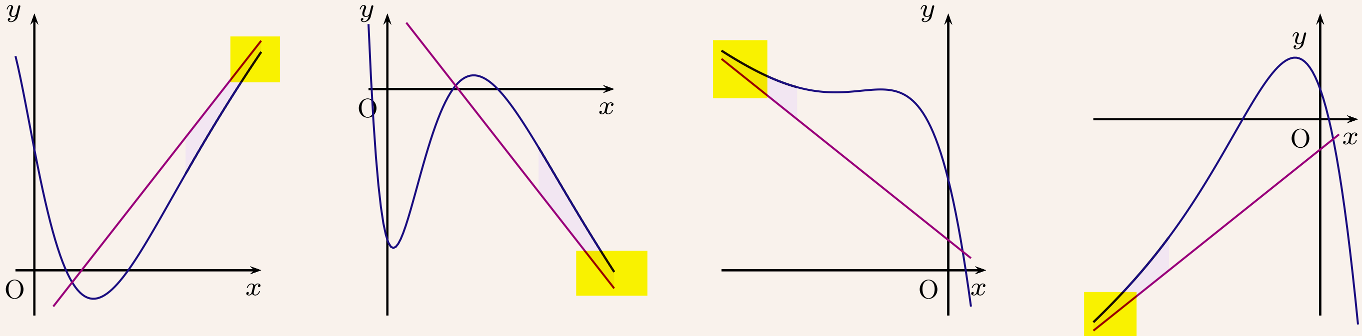
$\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x+1}+x+1$ $\quad \lim\limits_{x\to0} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x}$ $\quad \lim\limits_{x\to2} \frac{\sqrt{x+7}-3}{\sqrt{x+2}-2}$ $\quad \lim\limits_{x\to3} \frac{x^2-x-6}{x-3}$

Réponse ....
....
....
....
....
....

.

Asymptote oblique

Soit f une fonction définie sur un intervalle de borne $+\infty$ ou $-\infty$, et $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$. $\mathcal{D}$ une droite d'équation $y=ax+b$.
Si $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$ (ou $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$), on dit alors que la droite d'équation $y=ax+b$ est une asymptote oblique à la courbe représentative de la fonction f en $\pm\infty$. Pour étudier la position relative de la courbe représentative de la fonction f par rapport à une asymptote $\mathcal{D}$ d'équation $y=ax+b$, il suffit d'étudier le signe de la différence $f(x)-(ax+b)$



$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

Exercice n 6

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-\frac{1}{2}\}$ par $f(x)=2x-3+\dfrac{9}{2x+1}$.
On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. a Déterminer $\lim\limits_{x\to(\frac{1}{2})^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to(\frac{1}{2})^+} f(x)$.

   b Que peut-on dire du résultat précédent pour la courbe $\mathcal{C}$?

2. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

3. Montrer que $\Delta : y=2x-3$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}$ au voisinage de $\pm\infty$

Réponse ....
....
....
....
....
....