Cours Suites réeeles Bac Math

I) Rappels *

1) Suite arithmétique

* ***Définition :*** Une suite (U_n) est une suite arithmétique s'il existe un réel r tel que pour tout entier n, on a : $U_{n+1} = U_n + r$ Le réel r est appelé raison de la suite.

* ***Propriété :*** (U_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme U_0 , pour tout entier naturel n on a : $U_n = U_0 + nr$

* ***Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique :***

Soit , p et n des entiers naturels tel que $p \leq k \leq n$

$$\sum_{k=p}^{n} U_k = U_p + U_{p+1} + \cdots + U_{n-1} + U_n$$

$$= (n - p + 1) \times \frac{(U_p + U_n)}{2}$$

* ***Limite d'une suite arithmétique***

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} U_0 + nr$$

Si $r > 0$ $\quad \lim_{n\to+\infty} U_n = \cdots$ $\qquad$ Si $r < 0$ $\quad \lim_{n\to+\infty} U_n = \cdots$

2) Suite géomètrique

* ***Définition :*** Une suite (U_n) est une suite géométrique s'il existe un réel q tel que pour tout entier naturel n, on a :

$U_{n+1} = qU_n$. Le réel q est appelé raison de la suite.

* ***Propriété:*** (U_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme U_0. Pour tout entier naturel n, on a : $U_n = U_0 q^n$

* ***Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique :***

Soit , p et n des entiers naturels tel que $p \leq k \leq n$

$$\sum_{k=p}^{n} U_k = U_p + U_{p+1} + \cdots + U_{n-1} + U_n$$

$$= U_p \times \left(\frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}\right)$$

* ***Limite d'une suite géométrique***

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} U_0 q^n$$

Si $\quad -1 < q < 1 \quad$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \cdots$

Si $\quad q > 1 \quad$ et $\quad U_0 > 0 \quad$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \cdots$

Si $\quad q > 1 \quad$ et $\quad U_0 < 0 \quad$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \cdots$

Si $\quad q \leq -1 \quad$ alors ……………..

3) Démonstration par récurrence

Pour montrer par récurrence qu'une propriété $\mathrm{P_n}$ relative à un entier naturel n est vraie pour tout $\mathrm{n} \geq \mathrm{n_0}$ on doit

* Démontrer que la propriété est vraie pour $\mathrm{n_0}$

* Démontrer que si la propriété est vraie pour un rang $\mathrm{n} \geq \mathrm{n_0}$ alors elle reste vraie pour le rang suivant $(\mathrm{n}+1)$

II) Rappels **

* ***Théorème***

Soit $a \in IR$ et $n \in IN$ on a :

¤ Si $\quad -1 < a < 1 \quad$ alors $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} a^n = \cdots$

¤ Si $\quad a > 1 \quad$ alors $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} a^n = \cdots$

¤ Si $\quad a \leq -1 \quad$ ………………………..

* ***Théorème*** **:** Ssoit (U_n) , (V_n) et (W_n) trois suites réelles définies sur IN et $l \in IR$

Si ¤ il existe un entier naturel p telque pour tout $n \geq p$ on a : $V_n \leq U_n \leq W_n$

¤ … $= \cdots$ $= \cdots$

alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = l$

* ***Corollaire*** **:** Soit (U_n) et (V_n) deux suites réelles

Si ¤ il existe un entier naturel p telque pour tout $n \geq p$ on a : $|U_n| \leq |V_n|$

¤ $= \cdots$

alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$

* ***Théorème*** **:** Soit (U_n) et (V_n) deux suites réelles

Si ¤ il existe un entier naturel p telque pour tout $n \geq p$ on a : $\quad U_n \geq V_n$

¤ ……………………..

alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \cdots$

* ***Théorème :*** Soit (U_n) et (V_n) deux suites réelles

Si ¤ il existe un entier naturel p telque pour tout $n \geq p$ on a : $U_n \leq V_n$

¤ ……………………..

alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \cdots$

Exercice 1

1) On considère la suite (U_n) définie par : $U_n = \left(\frac{2}{n}\right)^n$; $n \geq 1$

   a) Montrer que pour $n \geq 4$ on a : $U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

   b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

2) On considère la suite (V_n) définie par : $V_n = n^{2n} - (2n)^n$

Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n$

Exercice 2

1) On considère la suite (U_n) définie sur IN^* par :

$U_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$

1) Montrer que pour tout $n \in IN^*$ on a : $U_n \geq \sqrt{n}$

2) En deduire $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

Exercice 3

On considère la suite (U_n) définie sur IN^* par :

$U_n = \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) + \sin\left(\frac{2}{n^2}\right) + \cdots + \sin\left(\frac{n}{n^2}\right)$

On se propose d'etudier la limite de la suite (U_n)

1) Soit la suite (V_n) définie sur IN^* par : $V_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}$

Montrer que la suite (V_n) converge vers $\frac{1}{2}$

2) Montrer que pour $n \in IN^*$; $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 \leq n^4$

3) Montrer que pour tout $x \geq 0$; $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$

4) a) Montrer que pour tout $n \geq 1$; $V_n - \frac{1}{6n^2} \leq U_n \leq V_n$

   a) Calculer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

III) Compléments sur les limùites des suites

1) * Théorème : Tout suite convergente est bornée

* ***Théorème*** : Soit (U_n) une suite réelle et $l \in R \cup \{-\infty, +\infty\}$

on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = l \iff \lim\limits_{n \to +\infty} U_{2n} = \lim\limits_{n \to +\infty} U_{2n+1} = \cdots$

Exercice 4

1) Soit la suite réelle (U_n) définie sur IN par $U_n = (-1)^n \times n$

   a) Exprimer U_{2n} et U_{2n+1} en fonction de n

   b) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_{2n}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} U_{2n+1}$

   c) Que peut-on conclure pour la suite (U_n)

2) Soit la suite réelle (V_n) définie sur IN par $V_n = \frac{n+(-1)^n}{2n+(-1)^{n+1}}$

   a) Exprimer V_{2n} et V_{2n+1} en fonction de n

   b) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} V_{2n}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} V_{2n+1}$

   c) En déduire que la suite (V_n) est convergente et préciser sa limite

2) Limites et ordre

* ***Théorème*** : Soit (U_n) une suite réelle

Si ¤ il existe unentier naturel p tel que :

$\forall n \geq p$ on a $U_n \geq 0$ (resp $U_n \leq 0$)

¤ $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = l$ avrc $l \in IR$

Alors $l \geq 0$ (resp $l \leq \cdots$)

* ***Remarque*** : Soit la suite réelle (U_n) sur IN^* par $U_n = \frac{1}{n}$

on a $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \cdots$ malgrés que $\forall n \in IN^*$, $U_n > 0$

donc même si on a dans le théorème précédent

$U_n > 0$ (resp $U_n < 0$)

Alors $l \geq \cdots$ (resp $l \leq \cdots$)

* ***Activité*** : Soit (U_n) et (V_n) deux suites réelles telles que

¤ il existe $p \in IN$ tel que $\forall n > p$ on a : $U_n \leq V_n$

¤ $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = l$ avec $l \in IR$

¤ $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = l'$ avec $l' \in IR$

Soit la suite réelle (W_n) définie par : $W_n = U_n - V_n$ on a :

¤ $\forall n \geq p : U_n \leq V_n \Rightarrow W_n$ ...

¤ $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (U_n - V_n) = \cdots$

donc $l - l' \ldots 0 \quad \Rightarrow \quad l \ldots l'$

* ***Corollaire :*** Soit (U_n) et (V_n) deux suites réelles telles que

Si ¤ $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l$ avec $l \in IR$

¤ $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = l'$ avec $l' \in IR$

alors $l \ldots l'$

3) Suites monotones et limites

* ***Théorème :*** Soit (U_n) une suite réelle

¤ Si la suite (U_n) est croissante et majorée alors elle converge vers un réel α et pour tout entier naturel n on a : $U_n \leq \alpha$

¤ Si la suite (U_n) est décroissante et ……… alors elle converge vers un réel α et pour tout entier naturel n on a : $U_n \ldots \alpha$

* ***Théorème :***

¤ Tout suite réelle croissante et non majorée …………..

¤ Tout suite réelle décroissante et non ………………………..

Exercice 5

On considère la suite (U_n) définie sur IN^* par : $U_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$

1) Montrer que la suite (U_n) est croissante
2) Montrer que $\forall n \geq 1$ on a : $U_{2n} - U_n \geq \frac{1}{2}$
3) En déduire que la suite (U_n) n'est pas majorée
4) Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

Exercice 6

Soit (U_n) la suite définie par $U_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, $\quad n \geq 1$

1) a) Calculer U_1 , U_2 et U_3

   b) Montrer que la suite (U_n) est croissante

2) a) Vérifier que pour tout entier naturel $k \geq 2$, on a : $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$

   b) En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 2$ on a : $U_n \leq 2 - \frac{1}{n}$

c) En déduire que la suite (U_n) converge vers un réel l et que $\frac{49}{36} \leq l \leq 2$

3) Soit un entier naturel $p \geq 3$

Soit (V_n) la suite définie par $V_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p}$, $n \geq 1$

a) Montrer que la suite (V_n) est croissante

b) Montrer que pour tout entier naturel non nul n on a : $V_n \leq U_n$

c) En déduire que la suite (V_n) converge vers un réel l' et $l' \leq 2$

Exercice 7

Soit (a_n) la suite définie par a_0 un réel donné et $a_{n+1} = {a_n}^2 + a_n$; $n \geq 0$

1) Montre que la suite (a_n) est croissante
2) Montre que si la suite (a_n) converge, alors sa limite est nécessairement nulle
3) Montre que si $a_0 > 0$, alors (a_n) diverge
4) Montre que si $a_0 < -1$, alors $a_1 > 0$
5) On suppose $-1 < a_0 < 0$

   a) Montrer que la suite (a_n) est bornée par -1 et 0

   b) En déduire que (a_n) converge et déterminer sa limite

6) Déterminer la limite de (a_n) lorsque

   a) $a_0 = 0$

   b) $a_0 = -1$

IV) suite définie à l'aide d'une fonction

* ***Théorème*** : Soit (U_n) et (V_n) deux suites réelles et f est une fonction telles que pour tout entier naturel n ; $V_n = f(U_n)$

Si ¤ $\lim_{n\to+\infty} U_n = l$ avec $l \in IR \cup \{-\infty , +\infty\}$

¤ $\lim_{x\to l} f(x) = l'$ avec $l' \in IR \cup \{-\infty , +\infty\}$

Alors $\lim_{n\to+\infty} V_n = \cdots$

Exercice 8

Soit la fonction f définie par $f(x) = x + \sin x$ et (U_n) la suite réelle définie sur IN par $U_n = n^2 + \sin n^2$

1) Montrer que $\forall x \in IR$ on a : $f(x) \geq x - 1$

2) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

3) Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

* **Corollaire :** Soit (U_n) et (V_n) deux suites réelles et f est une fonction telles que pour tout entier naturel n ; $V_n = f(U_n)$

Si ¤ $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = l$ **avec $l \in IR$**

¤ f est continue en l

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = \cdots$

* **Exemple 1 :** Soit à calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \sin\left(\frac{n+1}{n^2+2}\right)$

¤ $\lim\limits_{n \to +\infty}$ ……………………………………………

¤ la fonction $x \mapsto$ …………….. est continue en …………

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \sin\left(\frac{n+1}{n^2+2}\right) =$………………………

* **Exemple 2 :** Soit à calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right)$

¤ $\lim\limits_{n \to +\infty}$ ……………………………………………

¤ la fonction $x \mapsto$ …………….. est continue en …………

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right) =$……………………………………

* **Corollaire :** Soit (U_n) une suite réelle et f une fonction telles que : pour tout n $U_{n+1} = f(U_n)$

Si ¤ $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = l$ **avec $l \in IR$**

¤ f est continue en l

alors …………………………

Exercice 9

Soit la suite réelle (U_n) définie sur IN^* par $U_1 = 1$ et $U_{n+1} = \sqrt{3U_n}$ $\forall n \in IN^*$

1) Montrer que $\forall n \in IN^*$ on a : $0 \leq U_n \leq 3$

2) Montrer que la suite (U_n) est croissante

3) En déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite

Exercice 10

Soit la suite réelle (U_n) définie sur IN par $U_0 = a$ où $a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $U_{n+1} = \sin(U_n)$; $n \geq 0$

1) Etudier les variations sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ de la fonction $f : x \mapsto \sin x - x$

2) En déduire que pour tout réel de $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]$, $\sin x \leq x$

3) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $U_n \in \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]$

4) Montrer que la suite (U_n) est décroissante

5) En déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite

Exercice 11

Soit (U_n) la suite définie sur IN par $\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \frac{U_n}{2-U_n} \quad \text{pour tout } n \in IN \end{cases}$

1) a) Montrer par récurrence, que pour tout $n \in IN$ on a : $0 < U_n < 1$

b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite

2) On considère la suite (V_n) définie sur IN par $V_n = \frac{U_n}{1-U_n}$

a) Montrer (V_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$

b) Exprimer V_n en fonction de n

c) Déduire alors, que pour tout $n \in IN$ on a : $U_n = \frac{1}{1+2^n}$

3) On pose que pour tout $n \in IN$, $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$ et $S'_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_n$

a) Montrer que pour tout $n \in IN$ on a : $S'_n = 2 - V_n$

b) Calculer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} S'_n$

c) Montrer que pour tout $n \in IN$ on a : $2^n \leq 2^n + 1 \leq 2^{n+1}$ puis en déduire que pour tout $n \in IN$ on a : $\frac{1}{2}V_n \leq U_n \leq V_n$

d) Montrer que pour tout $n \in IN$ on a : $\frac{1}{2}S'_n \leq U_n \leq S'_n$

4) a) Montrer que la suite (S_n) est croissante

b) Montrer (S_n) est convergente et déterminer un encadrement de sa limite

Exercice 12

Soit la suite réelle (U_n) définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = 0{,}1 \\ U_{n+1} = 1{,}6U_n(1-U_n) \quad ; n \geq 0 \end{cases}$

1) Etudier les variations de la fonction $f : x \mapsto 1{,}6x(1-x)$

2) Montrer que pour tout $n \geq 0$ on a : $0{,}1 \leq U_n \leq \frac{3}{8}$

3) En déduire que la suite (U_n) converge

4) a) Montrer que pour tout entier naturel n, $\frac{3}{8} - U_{n+1} = 1{,}6\left(\frac{5}{8} - U_n\right)\left(\frac{3}{8} - U_n\right)$

b) On suppose que pour tout entier naturel $V_n = \frac{3}{8} - U_n$

Montrer que $V_n \geq 0$ et que $\frac{V_{n+1}}{V_n} \leq 0{,}84$

c) Montrer alors par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leq V_n \leq 0{,}84^n$

d) En déduire la limite de la suite (U_n)

e) Déterminer un entier n_0 tel que $0 \leq \frac{3}{8} - U_n \leq 10^{-5}$, $n \geq n_0$

V) suites adjacentes

* ***Définition*** : Soit (U_n) et (V_n) deux suites réelles définies sur IN. On dit qu'elles sont adjacentes si et seulement si :

- ¤ $\forall n \in IN \quad U_n \leq V_n$
- ¤ La suite (U_n) est croissante
- ¤ La suite (V_n) est décroissante
- ¤ $\lim\limits_{n\to+\infty} (U_n - V_n) = 0$

* ***Activité*** : Soit (U_n) et (V_n) deux suites adjacentes

¤ $\forall n \in IN \quad U_n \leq V_n$

or la suite (V_n) est décroissante donc $\forall n \in IN$; V_n …………

d'où $\forall n \in IN$; $U_n \leq$ ……….

et par suite (U_n) est croissate et majorée donc ………………………………..

¤ la suite (U_n) est croissante d'où U_n ……………………l

or $n \in IN$, $V_n \geq U_n$ d'où V_n …………………

et par suite (V_n) est décroissante et minorée donc ………………….. l'

¤ $\lim\limits_{n\to+\infty} (U_n - V_n) = 0 \quad \Rightarrow$ ………………… $\Rightarrow$ ……………………….

* ***Théorème*** : Deux suites adjacentes sont covergentes et convergent vers un même réel

Exercice 13

Soit (U_n) et (V_n) deux suites réelles définies sur IN^* par : $U_n = \frac{1}{n}$ et $V_n = -\frac{1}{n^2}$

Montrer que les suites (U_n) et (V_n) sont adjacenes