COURS NOMBRES COMPLEXES Bac Math

I) Forme algébrique d'un nombre complexe

Tout nombre complexe z s'écrit d'une manière unique sous la **forme algébrique** suivante : $\boldsymbol{z = a + ib}$ avec $(a\,,b) \in \mathbb{R}^2$

a est appelé partie réelle de z que l'on note $\boldsymbol{a = Re(z)}$

b est appelé partie imaginaire de z que l'on note $\boldsymbol{b = Im(z)}$

Exercice 1

Ecrire sous la forme algébrique chacun des nombres complexes suivants : $z_1 = (1+i)^2$ $z_2 = (1-i)^2$ $z_3 = (1+i)^3$

$z_4 = 2(1+i) - 3i(2-2i)$ $\quad z_5 = (1-i)(2+3i)$

$z_6 = (2-i)(4+2i)$ $\quad z_7 = (1-3i) + 2i(1-4i)$

II) Représentation géométrique d'un nombre complexe

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,,\vec{u}\,,\vec{v})$

* Soit $M(x\,,y)$ un point de P, on appelle et on note affixe de M le nombre complexe $\boldsymbol{aff(M) = z_M = x + iy}$

* $M(x\,,y)$ est le point image du nombre complexe $z = x + iy$

* Pour tout points A et B de P on appelle et on note affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$, le nombre complexe $\boldsymbol{aff(\overrightarrow{AB}) = z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A}$

* Pour tous vecteurs $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$ du plan et tous réels α et β on a :

$$\boldsymbol{aff(\alpha\vec{e_1} + \beta\vec{e_2}) = \alpha\, aff(\vec{e_1}) + \beta\, aff(\vec{e_2})}$$

Exercice 2

Soit les points A B et C d'affixes respectives $2+3i$, $1-2i$ et $-3-4i$

1) Placer les points A B et C.
2) Déterminer les affixes des vecteurs suivants : $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ $-2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$ et $-2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} + 4\overrightarrow{OA}$

III) Conjugué d'un nombre complexe

* Soit $z = a + ib$ avec $(a\,,b) \in \mathbb{R}^2$. On appelle et on note conjugué de z, le nombre complexe définie par $\overline{z} = a - ib$

* $\boldsymbol{z + \overline{z} = 2a}$ $\qquad \boldsymbol{z - \overline{z} = 2ib}$ $\qquad \boldsymbol{z \times \overline{z} = a^2 + b^2}$

$\boldsymbol{\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}}$ $\qquad \boldsymbol{\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}}$ $\qquad \boldsymbol{\overline{z^n} = (\overline{z})^n \quad n \in \mathbb{N}^*}$

$\boldsymbol{\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}}$ **pour** $\boldsymbol{z' \neq 0}$

$\boldsymbol{z \in \mathbb{R} \iff Im(z) = 0 \iff z = \overline{z}}$

$\boldsymbol{z \in i\mathbb{R} \iff Re(z) = 0 \iff z = -\overline{z}}$

Exercice 3

1) Ecrire sous la forme algébrique chacun des nombres complexes : $z_1 = \frac{1+3i}{2-i}$ $\quad z_2 = \frac{(1+2i)^2}{1-5i}$ $\quad z_3 = \frac{5-5i}{-3i+1} - \frac{1-18i}{3-4i}$
2) Montrer que le nombre complexe suivant est un réel : $z_1 = \frac{\sqrt{3}+3i}{1+i\sqrt{3}}$

2) Soient les nombres complexes

$z_1 = (2-3i)^{2020} + (2+3i)^{2020}$

$z_2 = (2-3i)^{2020} - (2+3i)^{2020}$

Montrer que z_1 est un réel et que z_2 est imaginaire pur

IV) Module d'un nombre complexe

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe **avec $(a\,,b) \in \mathbb{R}^2$**

et $M(a\,,b)$ on appelle et on note $|z|$ le réel positif définie par :

$$|z| = OM = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{z \times \overline{z}}$$

Pour tous nombres complexes z et z'

$|z.z'| = |z|.|z'| \quad |z^n| = |z|^n \; n \in \mathbb{N}^*$

$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ **pour** $z' \neq 0$

$z = a \quad a \in \mathbb{R} \quad |z| = |a|$

$z = ib \quad b \in \mathbb{R} \quad |z| = |b|$

$|z| = |\overline{z}|$

Pour tous point M et N du plan on a : $MN = |z_N - z_M|$

Exercice 4:

Déterminer le module de chacun des nombres complexes suivants

$z_1 = 2-3i \quad z_2 = -2+2i \quad z_3 = 5i \quad z_4 = 3i \quad z_5 = -2$

$z_6 = 4 \quad z_7 = (2+2i)^2(1-2i)^3(3-i)^4 \quad z_8 = \frac{(1+i)^3(2-i)^5}{(1+3i)^3(1-i)^2}$

Exercice 5 :

1) On donne $A(-2i)$ et $A(-i)$ Déterminer l'ensemble

$E = \left\{M(z) \in P \text{ tel que : } \left|\frac{iz-2}{z+i}\right| = 1\right\}$

2) On posant $z = x + iy$ avec $(x\,,y) \in \mathbb{R}^2$ Déterminer l'ensemble

$F = \left\{M(z) \in P \text{ tel que : } \left|\frac{iz-2}{z+i}\right| = 2\right\}$

Exercice 6

Le plan est muni à un repère orthonormé direct $(O\,,\vec{u}\,,\vec{v})$

On considère les points $A(1)$, $B(-i)$, à tout point $M \neq B$ d'affixe z on associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{1-z}{1-iz}$

1) a) Déterminer l'ensemble des points M tel que z' soit un réel.

b) Déterminer l'ensemble des points M tel que $|z'| = 1$

2) a) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}\backslash\{-i\}$ on a : $z' + i = \frac{-1+i}{z+i}$

b) En déduire que $BM \times BM' = \sqrt{2}$

c) En déduire que si M appartient au cercle de centre B et de rayon 1 alors M' appartient à un cercle que l'on précisera.

Exercice 7

Montrer le nombre complexe $z = \frac{a+b}{1+ab}$ est un réel où a et b sont deux nombres complexes tels que $ab \neq -1$ et $|a| = |b| = 1$

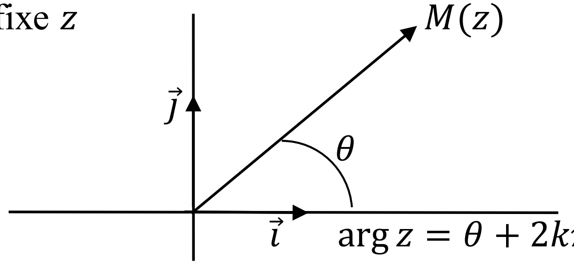
V) Arguments et angles orientés

Le plan est muni d'un un repère orthonormé direct $(O\,,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$

soit z un nombre complexe non nul et M son image.

On appelle un argument d'un nombre complexe z <u>non nul</u> ; noté

$\arg z$; toute mesure de l'angle orienté : $\left(\widehat{\vec{\imath}\,,\overrightarrow{OM}}\right)$ où M est le point du plan d'affixe z



$\arg z = \theta + 2k\pi\ ;\quad k \in \mathbb{Z}$

<u>Conséquences :</u>

Soit z un nombre complexe non nul et $(O\,,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$ un repère orthonormé direct du plan complexe. On a :

- **z est un réel positif $\quad\Leftrightarrow\quad \arg z = \cdots$**
- **z est un réel négatif $\quad\Leftrightarrow\quad \arg z = \cdots$**
- **z est un réel $\quad\Leftrightarrow\quad \arg z = \cdots$**
- **$z = ib$; avec $b \in \mathbb{R}_+^*$ $\quad\Leftrightarrow\quad \arg z = \cdots$**
- **$z = ib$; avec $b \in \mathbb{R}_-^*$ $\quad\Leftrightarrow\quad \arg z = \cdots$**
- **$z = ib$; avec $b \in \mathbb{R}^*$ $\quad\Leftrightarrow\quad \arg z = \cdots$**
- Soit M un point du plan d'affixe z alors :

$\left(\widehat{\vec{\imath}\,,\overrightarrow{OM}}\right) = \cdots$

- Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan d'affixe z alors : $\left(\widehat{\vec{\imath}\,,\vec{u}}\right) = \cdots$
- Soit A et B deux points distincts du plan d'affixes respectives z_A et z_B alors :

$\left(\widehat{\vec{\imath}\,,\overrightarrow{AB}}\right) = \cdots$

<u>Propriétés d'un argument d'un nombre complexe non nul</u>

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls

$\arg(z.z') = \arg(z) + \arg(z') + 2k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}$

$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) + 2k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}$

$(z \neq 0)$

$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') + 2k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z} \quad (z' \neq 0)$

$\arg(z^n) = \cdots$

$\arg(\bar{z}) = -$

$\arg(-z) = \cdots$

<u>Activité :</u>

Le plan est muni à un repère orthonormé direct $(O\,,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan d'affixes respectives : $z_{\vec{u}}$ et $z_{\vec{v}}$

- $\left(\widehat{\vec{u}\,,\vec{v}}\right) \equiv \left(\widehat{\vec{u}\,,\vec{\imath}}\right) + \left(\widehat{\vec{\imath}\,,\vec{v}}\right)[2\pi]$

$\equiv \left(\widehat{\vec{\imath}\,,\vec{v}}\right) \ldots \left(\widehat{\vec{\imath}\,,\vec{u}}\right)[2\pi]$

$\equiv \cdots$

$\equiv \cdots$

* $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow (\widehat{\vec{u}\,,\vec{v}}) = \cdots$

$\Leftrightarrow$ ... $\Leftrightarrow \frac{z_{\vec{v}}}{z_{\vec{u}}}$ ....

* $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow (\widehat{\vec{u}\,,\vec{v}}) = \cdots$

$\Leftrightarrow$ ... $\Leftrightarrow \frac{z_{\vec{v}}}{z_{\vec{u}}}$ ....

Théorème :

Le plan complexe est muni à un repère orthonormé direct $(O\,,\vec{i}\,,\vec{j})$

* Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan d'affixes respectives : $z_{\vec{u}}$ et $z_{\vec{v}}$

¤ **Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$ alors $(\widehat{\vec{u}\,,\vec{v}}) \equiv \cdots$**

¤ **Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow$ ...**

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow$ ...

* Soit A, B, C et D quatre points du plan d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D tel que $z_A \neq z_B$ et $z_C \neq z_D$ on a :

$(\widehat{\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{CD}}) \equiv \cdots$

V) Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Soit z un nombre complexe non nul. En notant $r = |z|$ et $\arg(z) \equiv \theta\ [2\pi]$ alors $\boldsymbol{z = r(\cos\theta + i\sin\theta)}$

Cette écriture est appelée écriture trigonométrique de z

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul avec $(a\,,b) \in \mathbb{R}^2$

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \cos\theta = \frac{a}{r} \qquad \sin\theta = \frac{b}{r}$$

On a alors $\boldsymbol{z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = [r\,,\theta]}$

est la forme trigonométrique de z

Soient $z = [r\,,\theta]$ et $z' = [r'\,,\theta']$ deux nombres complexes non nuls avec $r > 0$ $r' > 0$ $\theta \in \mathbb{R}$ et $\theta' \in \mathbb{R}$

$$\bar{z} = [r\,,-\theta] \qquad \frac{1}{z} = \left[\frac{1}{r}\,,-\theta\right] \qquad z.z' = [r.r',\theta + \theta']$$

$$\frac{z}{z'} = \left[\frac{r}{r'}\,,\theta - \theta'\right] \qquad z^n = [r^n\,,n\theta] \quad n \in \mathbb{N}$$

Exercice 8

Ecrire sous la forme trigonométrique chacun des nombres complexes suivants : $z_1 = 4$ $z_2 = -5$ $z_3 = 2i$ $z_4 = -3i$ $z_5 = \sqrt{3} - i$ $z_6 = -1 - i$

Exercice 9

Le plan est muni à un repère orthonormé direct $(O\,,\vec{u}\,,\vec{v})$

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 2 - i$ $z_B = 5$ et $z_C = 1 + 2i$

1) a) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b) Montrer que le triangle ABC est isocèle et rectangle en A.

c) Déterminer z_G l'affixe du point G centre du triangle ABC.

d) Déterminer z_D l'affixe du point D tel que $ABDC$ est un carré

2) Soit EFH un triangle équilatéral direct. Déterminer l'écriture algébrique du nombre complexe : $Z = \frac{z_F - z_E}{z_H - z_E}$

3) Déterminer les ensembles suivants :

$$S_1 = \left\{M(z) \in P \text{ tel que } \frac{z+i}{z+2} \in \mathbb{R}\right\}$$

$$S_2 = \left\{M(z) \in P \text{ tel que } \frac{z+i}{z+2} \in \mathbb{R}_+\right\}$$

Exercice 10

Soient les points A et B d'affixes respectives 1 et $-2i$ et f l'application de $P \backslash \{B\}$ dans P qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que $z' = \frac{\bar{z}+4i}{\bar{z}-2i}$

1) Vérifier que $z' - 1 = \frac{6i}{\bar{z}-2i}$

2) En déduire que $\left(\widehat{\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM'}}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \; ; k \in \mathbb{Z}$

3) a) Montrer que si M appartient au cercle de centre B et de rayon 3 alors M' appartient à un cercle que l'on déterminera.

b) Montrer que si M appartient à la droite (AB) alors M' appartient à une droite à préciser.

Exercice 11

Le plan est muni à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

On désigne par A et B les points d'affixes respectives i et 2

A tout point M du plan d'affixe z $(z \neq 2)$ on associe le point M' d'affixe $z' = \frac{z-i}{iz-2i}$

1) a) Montrer que $|z'| = \frac{AM}{BM}$

b) En déduire que lorsque M décrit la médiatrice du segment $[AB]$, le point M' décrit un cercle que l'on précisera.

2) On suppose que $z \neq i$ et $z \neq 2$

a) Montrer que $\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM'}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}}\right) - \frac{\pi}{2} + 2k\pi \; ; k \in \mathbb{Z}$

b) En déduire, que si M appartient à la droite (AB) alors le point M' appartient à une droite que l'on déterminera.

Exercice 12

Le plan est muni à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

1) Résoudre dans C l'équation $(z-1)^2 + 3 = 0$

2) On considère les points A , B , C et D d'affixes respectives

$z_A = -2$, $z_B = 1 + i\sqrt{3}$, $z_C = 1 - i\sqrt{3}$ et $z_D = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

a) Ecrire z_B , z_C et z_D sous forme trigonométrique

b) Placer les points A , B , C et D

c) Vérifier que les points A , B , C et D sont sur un même cercle que l'on précisera

3) a) Donner l'écriture cartésienne des nombres complexes suivants $z_B{}^2$ et $z_D . z_B{}^2$

b) Donner le module et un argument de $z_D . z_B{}^2$

c) En déduire alors les valeurs exactes de $\cos\frac{11\pi}{12}$ et $\sin\frac{11\pi}{12}$

4) Soit E le point d'affixe $(-i)$, à toit point M d'affixe z distinct de B on associe le point M' d'affixe $z' = \frac{z+2}{iz+\sqrt{3}-i}$

a) Déterminer et construire l'ensemble F des points M tel que $|z'| = 1$

b) Montrer que $(z' + i)(z - z_B) = \sqrt{3} - 3i$

c) Déterminer alors l'ensemble G des points $M'(z')$ lorsque M décrit le cercle de centre B et de rayon $\sqrt{3}$

III) Ecriture exponentielle d'un nombre complexe non nul :

Activité :

*Soit z un nombre complexe non nul alors $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

avec $r = \cdots$ et $\theta \equiv \cdots$

Si on pose par définition $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$ alors $z = re^{i\theta}$

* Soit $z = re^{i\theta}$; où $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$

donc $z = \cdots$

donc $r = \cdots$ et $\theta = \cdots$

Théorème et définition:

* Tout nombre complexe z non nul, s'écrit : $z = re^{i\theta}$ où :

$r = |z|$ et $\theta = \arg z + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

* L'écriture : $re^{i\theta}$ est dite l'écriture ou forme exponentielle de z.

* Soit un nombre complexe $z = re^{i\theta}$ où $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$

alors $r = |z|$ et $\theta = \arg z + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

Cas particuliers

$e^{i0} = \cdots$ $e^{i\pi} = \cdots$

$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cdots$ $e^{-i\frac{\pi}{2}} = \cdots$

Règles de calcul

Activité :

Soit $\theta \in \mathbb{R}$; $\beta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$

* $\overline{(e^{i\theta})} = \overline{[1\,,\theta]} = \cdots \qquad = \cdots$

* $e^{i\theta} \times e^{i\beta} = [1\,,\theta][1\,,\beta] = \cdots \qquad = \cdots$

* $(e^{i\theta})^n = [1\,,\theta]^n = \cdots \qquad = \cdots$

* $e^{-i\theta} \times e^{i\theta} = \cdots \qquad = \cdots \qquad \Rightarrow \quad e^{-i\theta} = \cdots$

* $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\beta}} = e^{i\theta} \times \frac{1}{e^{i\beta}} = \cdots \qquad = \cdots \qquad = \cdots$

Retenons :

Soit $\theta \in \mathbb{R}$; $\beta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$

$\overline{(e^{i\theta})} = \cdots$ $\qquad \dfrac{1}{e^{i\theta}} = \cdots$

$e^{i\theta} \times e^{i\beta} = \cdots$ $\qquad (e^{i\theta})^n = \cdots$

$\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\beta}} = \cdots$

Exercice 13

Déterminer l'écriture exponentielle de chacun des nombres complexes suivants : $z_1 = -3 \quad z_2 = 2i \quad z_3 = -4e^{i\frac{\pi}{5}}$

$z_4 = 3ie^{i\frac{\pi}{2}} \quad z_5 = 1 + i \quad z_6 = \sqrt{3} - i$

$z_7 = (1+i)(\sqrt{3} - i)^2 \quad z_8 = \frac{(\sqrt{3}+i)^2}{i(1-i)^3}$

Exercice 14

Soient les nombres complexes suivants :

$z_1 = 4 + 4i$ et $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$

1) Déterminer le module et un argument de z_1 et z_2
2) En déduire le module et un argument de chacun des complexes suivants : ${z_1}^2$, $z_1 \times z_2$, ${z_1}^3$, $\frac{z_1}{z_2}$ et $\frac{z_2}{z_1}$

Exercice 15

Soient les points $A(i)$ et $B\left(\frac{1+i}{2}\right)$. Soit l'application f qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que $z' = (1-i)z - 1$

1) a) Déterminer l'ensemble E des points $M(z)$ tels que : $|z'| = 2\sqrt{2}$

b) Soit $\theta \in [0, \pi]$. On pose $z = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta + i\sin\theta)$

Déterminer suivant les valeurs de θla forme trigonométrique de z'

2) a) On suppose $M \neq B$. Montrer que :

$\arg(z') = -\frac{\pi}{4} + \left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{BM}}\right) + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

b) En déduire l'ensemble F des points $M(z)$ tels que z' soit un réel négatif et construire F.

3) a) On suppose $M \neq A$. Montrer que le triangle AMM' est rectangle en M et déterminer une mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}}\right)$

b) En déduire une construction du point $M' = f(M)$ connaissant M dans P.

Exercice 16

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

1) on considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$

et $z_B = iz_A$. On désigne par I le milieu de $[AB]$ et on note z_I l'affixe de I

a) Donner la forme exponentielle de z_A et z_B

b) Placer les points A, B et I dans le repère $(O\,,\vec{u}\,,\vec{v})$

2) a) Montrer que le triangle OAB est isocèle rectangle.

b) En déduire que $OI = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et que $\left(\widehat{\vec{u}\,,\overrightarrow{OI}}\right) = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

c) Ecrire z_I sous la forme algébrique et en déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}$

IV) Nombres complexes et trigonométrie

Activité :

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$

* $\left(e^{i\theta}\right)^n = \cdots$

donc $(\cos\theta + \sin\theta)^n = \cdots$

* $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = \cdots$

$= \cdots$

$= \cdots$

donc $\cos\theta = \cdots$

* $e^{i\theta} - e^{-i\theta} = \cdots$

$= \cdots$

$= \cdots$

donc $\sin\theta = \cdots$

Formule de Moivre

Soit $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}$

$$(\cos\theta + \sin\theta)^n = \cos n\theta + \sin n\theta$$

Formules d'Euler

Soit $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}$

$$\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \cos\theta \qquad \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \sin\theta$$

Applications:

* On se propose de déterminer l'écriture exponentielle de :

$z_1 = 1 + e^{i\frac{\pi}{5}}$ et $z_2 = 1 + ie^{i\frac{\pi}{5}}$

$z_1 = 1 + e^{i\frac{\pi}{5}} = e^{i\frac{\pi}{10}}(\qquad\qquad) = \cdots$

$= \cdots \qquad\qquad = \cdots$

or $\frac{\pi}{10} \in] \qquad [$ donc

donc est l'écriture exponentielle de z_1

$z_2 = 1 + ie^{i\frac{\pi}{5}} = \cdots \qquad\qquad = \cdots$

$= \cdots \qquad\qquad = \cdots$

or donc

donc est l'écriture exponentielle de z_1

* Soit θ un réel tel que $\theta \in]-\pi\,,0[\, \cup\,]0\,,\pi[$

déterminer l'écriture exponentielle de $z_3 = 1 - e^{i\theta}$

$z_3 = 1 - e^{i\theta} = \cdots$

$= \cdots$

$= \cdots$

$= \cdots$

$\theta \in]-\pi\,,0[\, \cup\,]0\,,\pi[$ donc $\frac{\theta}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2}\,,0\right[\cup \left]0\,,\frac{\pi}{2}\right[$

¤ Si $\frac{\theta}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2}\,,0\right[$ alors $\sin\frac{\theta}{2} < 0$

¤ Si $\frac{\theta}{2} \in \left]0\,,\frac{\pi}{2}\right[$ alors $\sin\frac{\theta}{2} > 0$

Si $\frac{\theta}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2}\,,0\right[$ on a

$z_3 = \cdots$

…………………………

d'où $z_3 = \cdots$ avec $\left(-2\sin\frac{\theta}{2}\right) > 0$

Si $\frac{\theta}{2} \in \left]0\,,\frac{\pi}{2}\right[$ on a

$z_3 = \cdots$

…………………………

'où $z_3 = \cdots$ avec $\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right) > 0$

<u>Linéarisation</u>

* Soit à linéariser $cos^5\, x$ où $x \in \mathbb{R}$

$cos^5\, x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)^5$

(2) : $1 + 2 + 1$

(3) : ...

(4) : ...

(5) : ...

$cos^5\, x = \frac{1}{32}\left(\left(e^{ix}\right)^5 + 5\left(e^{ix}\right)^4 e^{-ix} + 10\left(e^{ix}\right)^3\left(e^{-ix}\right)^2 + 10\right)$

$= \cdots$

$= \cdots$

$= \cdots$

$= \cdots$

* Soit à linéariser sin^4x où $x \in \mathbb{R}$

$sin^4x = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^4 = \frac{1}{16}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^4$

$= \cdots$

$= \cdots$

$= \cdots$

$= \cdots$

$= \cdots$