Cours Equations à coefficients complexe 4ème Math

I) Racines carrées d'un nombre complexe

Définition : Soit a un nombre complexe, on appelle une racine carrée de a tout nombre complexe z tel que : $z^2 = a$

Exemples :

*) Vérifier que $(1+i)$ est une racine carrée de $2i$

$(1+i)^2 =$ …………………… $=$ ……………………

donc $(1+i)$ est une racine carrée de $2i$

* Soit a un nombre complexe non nul, déterminer les racines carrées de a^2

$z^2 = a^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

donc et sont les racines carrées de a^2

*)…………………… sont les racines carrées de $(1+2i)^2$

*) $(3+i)^8 = [(3+i)^{\cdots}]^2$

donc …………………… sont les racines carrées de $(3+i)^8$

* $-9 =$ ………… donc ………… et………… sont les racines carrées de -9

*) $8i = 4 \times 2i =$…………………… donc …………………… et……………………

sont les racines carrées de $8i$

*) $-16i = 8 \times (-2i) =$…………………… donc ……………………

et …………………… sont les racines carrées de $-16i$

*) $2e^{i\frac{\pi}{8}} =$ …………………… donc …………………… et…………………… sont

les racines carrées de $2e^{i\frac{\pi}{8}}$

*) Soit $r \in \mathbb{R}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ alors $re^{i\theta} =$ ……………………

donc …………… et …………… sont les racines carrées de $re^{i\theta}$

Théorème :

***) Tout nombre complexe non nul admet exactement deux racines carrées opposées.**

***) Soit $r \in \mathbb{R}^*_+$ et $\theta \in \mathbb{R}$ alors $\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $-\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$ sont les racines carrées de :** ……………………

Détermination

Activité :

Soit a et z deux nombres complexes, posons $z = x + iy$

$(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $a = a_1 + ia_2$ avec $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$

$z^2 = (x+iy)^2 =$ ……………………

$=$ ……………………

$|z^2| = |z|^2 =$ ……………………

*) Si $z^2 = a \Rightarrow \begin{cases} Re(z^2) = Re(a) \\ Im(z^2) = Im(a) \\ |z^2| = |a| \end{cases} \Rightarrow$ ……………………

$\Rightarrow$ ……………………

*) Si $\begin{cases} x^2 - y^2 = a_1 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \\ xy \text{ et } a_2 \text{ ……………………} \end{cases}$

¤ $x^2 - y^2 = a_1 \Rightarrow Re(z^2) = Re(a)$

¤ $x^2 + y^2 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \Rightarrow |z^2| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

$\Rightarrow \sqrt{(x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow 2xy = \cdots$ ou $2xy = \cdots$

¤ or xy et a_2 ont même signe donc

$2xy = \cdots \Rightarrow Im(\dots) = Im(\dots)$

et par suite $Re(z^2) = Re(a)$ et $Im(z^2) = Im(a)$

d'où $z^2 =$ ……………

Théorème : Soit a et z deux complexes tels que $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

On a :

$$z^2 = a \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = Re(a) \\ x^2 + y^2 = |a| \\ xy \text{ et } Im(a) \text{ ont même signe} \end{cases}$$

Exemple :

Soit à déterminer les racines carrées de $5 - 12i$

posons $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$z^2 = 5 - 12i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = \text{……………} \\ x^2 + y^2 = \text{……………} \\ xy \text{ ……………} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \text{……………} \\ y^2 = \text{……………} \\ xy \text{ ……………} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \text{……………} \text{ ou } x = \text{……………} \\ x = \text{……………} \text{ ou } x = \text{……………} \\ xy \text{……………} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \text{……………} \\ y = \text{……………} \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = \text{……………} \\ y = \text{……………} \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ …………… et …………… sont les raciness carrées de : $5 - 12i$

II) Résolution d'une équation du second degré

Introduction :

¤ Soit à résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $2z^2 - 4i = 0$

$2z^2 - 4i = 0 \Leftrightarrow 2z^2 = \text{……………} \Leftrightarrow z^2 = \text{……………}$

$\Leftrightarrow z^2 = (\text{……………})^2 \Leftrightarrow z = \text{……………}$ ou $z = \text{……………}$

donc $S_{\mathbb{C}} = \{ \qquad\qquad\qquad\qquad \}$

¤ Soit à resoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 3iz = 0$

$z^2 - 3iz = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z(\qquad\qquad) = 0$

$\Leftrightarrow \quad z =$ ………… ou $z =$ ……………………

donc $S_{\mathbb{C}} = \{ \qquad\qquad\qquad\qquad \}$

Activité :

Soit , b et c trois nombres complexes tels que $a \neq 0$ à

on considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): az^2 + bz + c = 0$

$(E) \Leftrightarrow a(\qquad\qquad\qquad\qquad) = 0$

$\Leftrightarrow \quad a[(\qquad\qquad\qquad)^2 \qquad\qquad\qquad] = 0$

$\Leftrightarrow \quad a[(\qquad\qquad\qquad)^2 \qquad\qquad\qquad] = 0$

posons $\Delta = b^2 - 4ac$, Δ est un nombre complexe donc il admet au moins une racine carrée δ d'où

$(E) \Leftrightarrow a[(\qquad\qquad\qquad)^2 - (\qquad\qquad\qquad)^2] = 0$

$\Leftrightarrow \quad a(\qquad\qquad\qquad)(\qquad\qquad\qquad) = 0$

$\Leftrightarrow \quad z =$ …………………… ou $z =$ ……………………

donc l'équation (E) admet dans $\mathbb{C}$ ……………………

$z' =$ …………………… et $z'' =$ ……………………

¤ $z' + z'' =$ …………………… = …………………… = ……………

$z' \times z'' =$ …………………… = ……………………

= …………………… = ……………………

¤ Si $a + b + c = 0$ alors 1 est une solution de l'équation (E)

notons par z' l'autre solution on a :

$1 \times z' =$ …………… $\Rightarrow \quad z' =$ ……………

donc ……… et ………… sont les solutions de l'équation (E)

¤ Si $a - b + c = 0$ alors -1 est une solution de l'équation (E)

notons par z' l'autre solution on a :

$-1 \times z' =$ …………… $\Rightarrow \quad z' =$ ……………

donc ……… et ………… sont les solutions de l'équation (E)

Théorème :

Soit , b et c trois nombres complexes tels que $a \neq 0$

on considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): az^2 + bz + c = 0$

¤ L'équation (E) admet dans $\mathbb{C}$ deux solutions z' et z'' définies par :

$z' = \frac{\qquad}{\qquad}$ et $z'' = \frac{\qquad}{\qquad}$

où δ est une racine carrée de $\Delta =$ ……………………

¤ On désigne par z' et z'' les solutions de (E)

$z' + z'' =$ …………………… et $z' \times z'' =$ ……………………

¤ $\forall \mathbf{z} \in \mathbb{C}$ on a : $az^2 + bz + c = a(\qquad\qquad)(\qquad\qquad)$

¤ Si $a + b + c = 0$ alors ………… et ………… sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E)

¤ Si $a - b + c = 0$ alors …………… et …………… sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E)

Remarque : Soit l'équation $(E) : az^2 + bz + c = 0$ où , b et c trois nombres complexes tels que $a \neq 0$

Si $\Delta = 0$ alors l'équation (E) admet dans $\mathbb{C}$ ……………………………

définie par $z_0 =$ ……………………

Exemples :

* Soit à résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + 18z + 1681 = 0$

$\Delta =$ …………………… $=$ ……………………

donc $\delta =$ …………………… est une racine carrée de Δ

$z' =$ …………………… $=$ ……………………

$z'' =$ …………………… ……………………

$S_{\mathbb{C}} = \{$ $\}$

* Soit à résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\mathrm{z}^2 - (5 - \mathrm{i})\mathrm{z} + 8 - \mathrm{i} = 0$

$\Delta =$ …………………… $=$ ……………………

posons $\delta = x + iy$ avec $(x , y) \in \mathbb{R}^2$

$$\delta^2 = \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \ldots y^2 = \ldots\ldots \\ x^2 \ldots y^2 = \ldots\ldots \\ xy \ \ldots\ldots \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \ldots\ldots \\ y^2 = \ldots\ldots \\ xy \ \ldots\ldots \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \ldots\ldots & ou \ \ x = \ldots\ldots \\ y = \ldots\ldots & ou \ \ y = \ldots\ldots \\ xy \ \ldots\ldots \end{cases}$$

On peut choisir $\delta =$ ……………………

$z' =$ …………………… $=$ ……………………

$z'' =$ …………………… $=$ ……………………

$S_{\mathbb{C}} = \{$ $\}$

Exercice 1

1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2e^{i\alpha}z + 2e^{2i\alpha} = 0$

   b) Mettre les solutions sous la forme exponentielle

2) Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O , \vec{u} , \vec{v})$

On désigne par A et B les points d'affixes respectives

$z_1 = (1 - i)e^{i\alpha}$ et $z_2 = (1 + i)e^{i\alpha}$

   a) Montrer que $\frac{z_2}{z_1} = i$

   b) En déduire que OAB est un triangle rectangle et isocèle en O

3) a) Montrer que $\left(\widehat{\vec{u} , \overrightarrow{AB}}\right) \equiv \alpha + \frac{\pi}{2} \ [2\pi]$

   b) Déterminer α pour que la droite (AB) soit parallèle à la droite Δ d'équation $y = x$

   c) Construire A et B pour la valeur de α trouvée

III) Racine n^ieme d'un nombre complexe

Définition : Soit a un nombre complexe et n un entier naturel tel que $n \geq 2$

On appelle une racine n^ieme de a tout nombre complexe z tel que $z^n = a$

Activité : Soit $r \in \mathbb{R}^*_+$ et $\theta \in \mathbb{R}$ et z un nombre complexe non nul tel que $z = re^{i\theta}$

¤ $z^4 = 16e^{i\frac{\pi}{4}} \Leftrightarrow \left(re^{i\theta}\right)^4 = 16e^{i\frac{\pi}{4}} \Leftrightarrow$ .... $= 16e^{i\frac{\pi}{4}}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{....................} = \text{....................} \\ \text{....................} = \text{....................} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} r = \text{....................} \\ \theta = \text{....................} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \quad z =$ .... avec $k \in \{ \qquad \qquad \}$

¤ dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ on considère les points M_0, M_1, M_2 et M_3 d'affixes respectives

$z_0 =$ .... $z_1 =$ .... $z_2 =$ .... $z_3 =$ ....

–) $|z_0| = |z_1| = |z_2| = |z_3| =$ ....

–) $\left(\widehat{\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM_1}}\right) \equiv arg\left(\frac{\qquad}{\qquad}\right)$ $[2\pi]$

$\equiv arg(\qquad) - arg(\qquad)$ $[2\pi]$

$\equiv$ .... – .... $[2\pi]$

$\equiv$ .... $[2\pi]$

On montre de même que :

$\left(\widehat{\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{OM_2}, \overrightarrow{OM_3}}\right)$ $[2\pi]$

$\equiv \left(\widehat{\overrightarrow{OM_3}, \overrightarrow{OM_4}}\right)$ $[2\pi]$

$\equiv \frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$

et par suite $M_0M_1M_2M_3$ est un .... de centre .... inscrit dans le cercle de centre .... et de rayon ....

Théorème : Soit $r \in \mathbb{R}^*_+$; $\theta \in \mathbb{R}$ et n un entier naturel tel que $n \geq 2$

¤ Le nombre complexe $re^{i\theta}$ admet exactement n racines n^ieme définies par :

$\sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}$ où $k \in \{0, 1, 2 \ldots n-1\}$

¤ Lorsque $n \geq 3$; dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$; les points images des racines n^ieme du nombre complexe $re^{i\theta}$ sont les sommets d'un polygone régulier inscrit dans le cercle de centre .... et de rayon ....

Exemple : Soit à déterminer les racines cubiques de : $1 + i$

$1 + i = \sqrt{2}(\qquad\qquad) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

donc les racines cubiques de $1 + i$ sont de la forme

.... où $k \in \{ \qquad \}$

¤ Soit à résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^3 = 4(1 + i\sqrt{3})$

$z^3 = 4(1 + i\sqrt{3}) \Leftrightarrow z^3 = 8(\qquad\qquad) \Leftrightarrow z^3 = 8e^{i\cdots\cdots}$

$\Leftrightarrow z =$ …………………… où $k \in \{\qquad\qquad\}$

$S_{\mathbb{C}} = \{\qquad\qquad\qquad\}$

IV) Exemples d'équations de degré supérieur à 2

Exemple 1: Soit à résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$(E): z^4 + (3 - 4i)z^2 - 12i = 0$

On pose $Z = z^2$

$(E) \Leftrightarrow Z^2 + (3 - 4i)Z - 12i = 0$

$\Delta =$ …………………… $=$ ……………………

posons $\delta = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$\delta^2 = \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \ldots y^2 = \cdots\cdots \\ x^2 \ldots y^2 = \cdots\cdots \\ xy \;\cdots\cdots \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \cdots\cdots \\ y^2 = \cdots\cdots \\ xy \;\cdots\cdots \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \cdots\cdots \quad ou \quad x = \cdots\cdots \\ y = \cdots\cdots \quad ou \quad y = \cdots\cdots \\ xy \;\cdots\cdots \end{cases}$

on peut choisir $\delta =$ ……………

$Z' =$ …………………… $=$ …………………… $=$ ……………

$Z'' =$ …………………… $=$ …………………… $=$ ……………

–) $z^2 =$ …………… $=$ ……………

……………………………………………………………………

–) $z^2 =$ …………… $=$ ……………

……………………………………………………………………

$S_{\mathbb{C}} = \{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\}$

Exemple 2: On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$(E): z^3 - 2iz^2 + 2(1 - i\sqrt{3})z - 4(i + \sqrt{3}) = 0$

montrons que l'équation (E) admet une unique solution imaginaire pure

soit $\alpha \in \mathbb{R}$; (αi) est une solution de (E)

$\Leftrightarrow$ ……………………………………………………

$\Leftrightarrow$ ……………………………………………………

$\Leftrightarrow$ ……………………………………………………

$\Leftrightarrow$ ……………………………………………………

$\Leftrightarrow \begin{cases} \cdots\cdots\cdots\cdots = \quad (1) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots = \quad (2) \end{cases}$

$(1) \Leftrightarrow$ …………………… $\Leftrightarrow \alpha =$ ……………

–) …………………… $=$ ……………………

donc 2 vérifie l'équation (2) et par suite l'équation (E) admet une unique solution imaginaire pure qui est $2i$

–) On se propose de factoriser l'expression :

$z^3 - 2iz^2 + 2(1 - i\sqrt{3})z - 4(i + \sqrt{3})$

$2i$ est une solution de l'équation (E) donc il existent trois nombres complexes a , b et c tels que :

$z^3-2iz^2+2\left(1-i\sqrt{3}\right)z-4\left(i+\sqrt{3}\right)$

$=$ ……………………………………………………

$=$ ……………………………………………………

$=$ ……………………………………………………

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \text{……………} \\ b-2ia = \text{……………} \\ c-2ib = \text{……………} \\ -2ic = \text{……………} \end{cases}$ …………… $\Leftrightarrow \begin{cases} a = \text{……………} \\ b = \text{……………} \\ c = \text{……………} \\ -2ic = \text{……………} \end{cases}$

donc

$z^3-2iz^2+2\left(1-i\sqrt{3}\right)-4\left(i+\sqrt{3}\right)$

$=$ ……………………………………………………

$*$) Résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E)

$(E) \Leftrightarrow (\qquad\qquad)(\qquad\qquad\qquad\qquad) = 0$

$\Leftrightarrow$ …………………… ou ……………………………………

$-$) $z-2i=0 \;\Leftrightarrow\; z=$ ……………………

$-$) $z^2+2-2i\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow z^2=$ ……………………

$\Leftrightarrow\; z^2=$ ……………………

$\Leftrightarrow\; z=$ …………………… ou $z=$ ……………………

$S_{\mathbb{C}} = \{ \qquad\qquad\qquad\qquad \}$

Exercice 2

Le P plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,,\vec{u}\,,\vec{v})$

1) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$(E): z^3-(4+i)z^2+(7+i)z-4=0$

a) Montrer que l'équation (E) admet une racine réelle que l'on déterminera

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)

2) a) Représenter les points , B et C d'affixes respectives : 1 , $2+2i$, et $1-i$

b) Déterminer le module et un argument de $\frac{2+2i}{1-i}$ et en déduire la nature du triangle OBC

c) Que représente la droite (OA) pour le triangle OBC ?

d) Soit D le point tel que $CD=CO$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{CO}\,,\overrightarrow{CD}}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

Quelle est la nature du quadrilatère $OCDB$

Exercice 3

Le P plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,,\vec{u}\,,\vec{v})$

Soit A le point d'affixe $-i$

On considère l'application f de $P\backslash\{A\}$ dans P qui, à tout point $M(z)$ de $P\backslash\{A\}$ associe le point $M'(z')$ z' telle que $z'=\frac{i\bar{z}}{i-\bar{z}}$

1) Déterminer les points invariants par f

2) a) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}\backslash\{-i\}$ on a :

$(z'+i)(\overline{z}-i)=1$

b) En déduire que $AM' \times AM = 1$ et que $M' \in [AM)$

3) a) Soit $\theta \in \mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{\pi}{2}+2k\pi \, , k \in \mathbb{Z}\right\}$

Montrer que l'affixe de $f(M)$ est égale à $e^{i\theta}$ si et seulement si

$z = -\frac{1}{2}\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+i\right)$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = 1$

c) en déduire les solutions de l'équation $iz^3 = (-i-z)^3$

Exercice 4

Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation (E): $z^2 - \left(2i\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}\right)z - 4e^{i\frac{\pi}{6}} = 0$

1) a) Vérifier que $e^{i\frac{5\pi}{12}}\left(e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{-i\frac{\pi}{4}}\right) = e^{i\frac{2\pi}{3}} - e^{-i\frac{\pi}{6}}$

et que $e^{i\frac{2\pi}{3}} - e^{-i\frac{\pi}{6}} = i\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$

b) Vérifier alors que $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ est une solution de l'équation (E)

c) Trouver alors l'autre solution z_2 de l'équation (E)

d) Ecrire chacun des nombre complexe z_1 et z_2 sous forme cartésienne

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,,\vec{u}\,,\vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 1+i\sqrt{3}$ et $z_B = -\sqrt{3}+i$

a) Vérifier que $z_B = iz_A$

b) Déduire que le triangle OAB est isocèle rectangle

c) Construire les points A et B

3) Soit C le point d'affixe $z_C = (1-\sqrt{3}) + i(1+\sqrt{3})$

a) Montrer que le quadrilatère $OACB$ est un carré

b) Placer le point C

c) Déterminer la forme exponentielle de z_C

Exercice 5

Soit dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation

(E): $z^2 - \left(1+i(2+\sqrt{3})\right)z - 2(\sqrt{3}-i) = 0$

1) a) Vérifier que $2i$ est une solution de (E)

b) Déterminer l'autre solution de (E)

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,,\vec{u}\,,\vec{v})$, on note A, B et I les points du respectives plan d'affixes $z_A = 1+i\sqrt{3}$, $z_B = 2i$ et $z_I = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}+2}{2}$

a) Mettre les nombres complexes z_A et z_B sous la forme exponentielle

b) Vérifier que A et B sont deux points du cercle (C) de centre O et de rayon 2

c) Vérifier que I est le milieu du segment $[AB]$

d) Construire le cercle (C) ainsi que les points A, B et I

3) a) Justifier que la demi-droite $[OI)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$

b) Vérifier que $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}\,,\overrightarrow{OI}}\right) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi\,, k \in \mathbb{Z}$

c) Montrer que $\left(\widehat{\vec{u}\,,\overrightarrow{OI}}\right) = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi\,, k \in \mathbb{Z}$

d) En déduire que $z_I = \sqrt{2+\sqrt{3}}e^{i\frac{5\pi}{12}}$

4) Donner alors les valeurs exactes $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$