Cours Dérivabilité 4ème Mathématiques

I) Rappels

* Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I

$(f+g)'=f'+g' \quad (f.g)'=f'.g+g'.f \quad ((f)^n)'=nf'f^{n-1}$

si $a\in\mathbb{R}$ $(af(x))'=af'(x)$ si $g(x)\neq 0$ $\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'.g-g'.f}{g^2}$ si $f(x)\neq 0$ $\left(\frac{1}{f}\right)'=\frac{-f'}{f^2}$

si $f(x)>0$ $\left(\sqrt{f}\right)'=\frac{f'}{2\sqrt{f}}$

si $x\in\mathbb{R}$ $(\sin(ax+b))'=a\cos(ax+b)$ $(\cos(ax+b))'=-a\sin(ax+b)$

si $x\in\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\,,k\in\mathbb{Z}\right\}$ $(\tan x)'=1+tan^2(x)$

* Si $\lim\limits_{x\to a^{\pm}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=b$; $b\in IR$

alors f est dérivable à gauche en a (resp à droite en a) et $\lim\limits_{x\to a^{\pm}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$

* Si $\lim\limits_{x\to a^{\pm}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\pm\infty$ alors f est n'est pas dérivable à gauche en a respectivement à droite en a et la courbe de f admet à gauche en a (resp à droite en) une demi tangente verticale dirigée vers le haut ou vers le bas (on respecte la règle de signe)

* Soit f une fonction dérivable en un réel x_0 et T la tangente à,C_f au point d'abscisse x_0 alors

$T:y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

Exercice 1

Dans chacun des cas suivants déterminer le domaine de dérivabilité I de la fonction f et calculer $f'(x)$ pour tout $x\in I$

* $f(x)=-3x^2+4x-5$ * $f(x)=\frac{x^2-2x+3}{x^2-1}$ * $f(x)=\sqrt{-x^2+4x-3}$

* $f(x)=(2x^3-3x^2+4x-5)^4$ * $f(x)=(x^2+2x)\sqrt{x^2+x+1}$

* $f(x)=(2x-1)\cos(3x-3)$ * $f(x)=(3x^2-1)\sin(-2x+1)$ * $f(x)=(-x^2-x)\tan x$

* $f(x)=(1-x-3x^3)(x^2+2x)^3$ * $f(x)=\cos(3x)-\sin(2x)$ * $f(x)=\frac{\sin x}{1-\cos x}$

* $f(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ * $f(x)=\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}$ * $f(x)=\frac{(x+1)^3}{x^2}$

II) Dérivabilité d'une fonction composée

*** *Activité*** Soit a un réel et f une fonction dérivable en a et g une fonction dérivable en $f(a) = b$

f est dérivable en a ⇨ $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} =$ ……………………

g est dérivable en b ⇨ $\lim\limits_{x \to b}$ ……………………

or $\lim\limits_{x \to a} \frac{(g\ o\ f)(x)-(g\ o\ f)(a)}{x-a} = \lim\limits_{x \to a} \frac{g(f(x))-g(f(a))}{f(x)-f(a)} \times$ ……………………………………………

or $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) \in \mathbb{R}$

posons $X = f(x)$; f est dérivable en a donc f est continue en a

donc lorsque $x \to a$ alors $X \to$ ……………………

d'où $\lim\limits_{x \to a} \frac{g(f(x))-g(f(a))}{f(x)-f(a)} =$ …………………………… $=$ ………………

et par suite $\lim\limits_{x \to a} \frac{(g\ o\ f)(x)-(g\ o\ f)(a)}{x-a} =$ ………………

donc la fonction $(g\ o\ f)$ est dérivable en a et $(g\ o\ f)'(a) =$ ………………

*** *Théorème*** Soit f une fonction dérivable en un réel a et g une fonction dérivable en $f(a)$. Alors la fonction $(g\ o\ f)$ est dérivable en ……………… et $(g\ o\ f)'(a) =$ ………………

*** *Conséquence*** Soit f et g deux fonctions

Si
- ¤ f est dérivable sur un intervalle I
- ¤ g est dérivable sur un intervalle J
- ¤ $\forall x \in I$ on a $f(x) \in J$

alors la fonction $(g\ o\ f)$ est ……………… et $\forall x \in$ ……… on a $(g\ o\ f)'(x) =$ ………………

*** *Exemples***

* Montrons que la fonction $f : x \mapsto \cos(x^2+3)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

¤ la fonction : $x \mapsto x^2 + 3$ est ………………

¤ la fonction : $x \mapsto \cos x$ est ………………

¤ $\forall x \in$ ……… on a (x^2+3) ………

donc la fonction f est ………………

$\forall x \in \mathbb{R}$; $f'(x) =$ …………………… $=$ …………………… $=$ ……………………

* Montrons que la fonction $g : x \mapsto \sin\left(\sqrt{1-\cos(\pi x)}\right)$ est dérivable sur l'intervalle $]0\,,2[$

¤ la fonction : $x \mapsto 1-\cos(\pi x)$ est ……………………

donc la fonction : $x \mapsto$ …………………… est dérivable sur l'intervalle sur l'intervalle ……………

¤ la fonction : $x \mapsto$ ……………… est dérivable sur l'intervalle sur ………

¤ $\forall x \in$ .... on a ....

donc la fonction g ....

et $\forall x \in]0\,,2[\ \ g'(x) =$ .... $=$ ....

* Montrons que la fonction $h\colon x \mapsto \tan(x\cos x)$ est dérivable sur l'intervalle $\left]0\,,\frac{\pi}{2}\right[$

¤ la fonction : $x \mapsto$

¤ la fonction : $x \mapsto$

¤ $\forall x \in$ .... on a $\begin{cases} \dots < x < \cdots \\ \dots \cos x \dots \end{cases}$

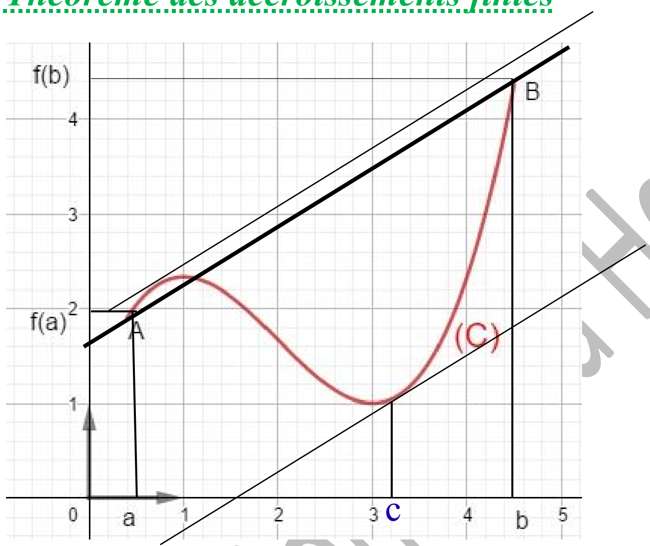
donc $x\cos x \in$ ....

d'où la fonction h est ....

et $\forall x \in \left]0\,,\frac{\pi}{2}\right[\ \ h'(x) =$ .... $=$ ....

III) Théorème et inégalités des acrroissement finies

1) Théorème des accroissements finies



La courbe (C) ci-dessus est celle d'une fonction f qui est ______________ sur $[a\,,b]$ et ______________ sur $]a\,,b[$

on constate que la courbe (C) admet au moins une tangente T en un point d'abscisse c ; qui est ______________ à la droite (AB)

T est (AB) sont ______________ donc elles ont le même ______________ donc ______________

$\Rightarrow f(b) - f(a) =$ ______________

* ***Théorème*** Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,,b]$ (avec $a < b$) et dérivable sur $]a\,,b[$ alors il existe au moins un réel $c \in$ _______ tel que $f(b) - f(a) =$ ______________

. * ***Théorème de Rolle*** Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,,b]$ (avec $a < b$) et dérivable sur $]a\,,b[$

Si $f(a) = f(b)$ alors il existe au moins un réel $c \in$ ________ tel que $f'(c) =$ ________

*** Applications**

1) Déterminons une valeur approchée de $\sin\left(\frac{\pi}{1000}\right)$

¤ la fonction $f : x \mapsto \sin x$ est ________________ sur l'intervalle $\left[0\,,\frac{\pi}{1000}\right]$ et ________________

sur l'intervalle $\left]0\,,\frac{\pi}{1000}\right[$ donc il existe au moins un réel ____________ tel que

$f\left(\frac{\pi}{1000}\right) - f(0) =$ ________________

⇨ ____

or $c \in]\dots,\dots[$ donc $c \simeq$ ________________

⇨ $f'(c) \simeq$ __________ d'où $\sin\left(\frac{\pi}{1000}\right) \simeq$ ....

2) Montrons que $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$

¤ Soit $x \in \mathbb{R}^*_+$; la fonction $f : t \mapsto \sin t$ est .... sur l'interval $[0\,,x]$

et .... sur l'interval $]0\,,x[$ alors ....

tel que $f(x) - f(0) =$ ....

⇨ $\frac{\sin x}{x} =$ .... or $c \in]0\,,x[$ donc lorsque $x \to 0^+$ alors $c \to$ _______

d'où $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{c\to 0^+}$ _______ $=$ _______

2) inégalités des accroissements finis

* ***Activité*** Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,,b]$ (avec $a < b$) et dérivable sur $]a\,,b[$ alors ....

on suppose qu'ils existent deux réel m et M tels que pour tout $x \in]a\,,b[$; $m \leq f'(x) \leq M$

or $c \in]a\,,b[$ donc _______ $\leq f'(c) \leq$ _______

⇨ ____________ $\leq f'(c)(b-a) \leq$ ____________

⇨ ____________ $\leq$ ____________ $\leq$ ____________

* ***Théorème*** Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,,b]$ (avec $a < b$) et dérivable sur $]a\,,b[$ alors il existe deux réels m et M tels que $\forall x \in]a\,,b[$ on a :

$m \leq f'(x) \leq M$ alors ____________ $\leq$ ____________ $\leq$ ____________

Exercice 2

1) Montrer que pour tout réels x et y de l'interval $\left[\frac{\pi}{6}\,,\frac{\pi}{4}\right]$ avec $x < y$ on a :

$\frac{\sqrt{2}}{2}(y-x) \leq \sin y - \sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}(y-x)$

2) En déduire que $\frac{\sqrt{2}}{12} \leq \frac{\sqrt{2}-1}{\pi} \leq \frac{\sqrt{3}}{12}$

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ par : $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\tan x} & \text{si } x \neq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{si } x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

1) Montrer que f est dérivable sur $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$

2) Montrer que pour tout $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$: $-2 \leq f'(x) \leq -1$

3) En déduire que pour tout $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$; $\frac{\pi}{2} - 2x \leq \frac{1-\tan x}{\tan x} \leq \frac{\pi}{4} - x$

* **Activité** Soit f une fonction dérvable sur un intervalle I et M un réel strictement positif tel que $\forall x \in I$ on a : $|f'(x)| \leq M$. Soient a et b deux réels de l'intervalle I

¤ Si $a = b$ on a : $|f(b) - f(a)| =$ ______

$M|b - a| =$ ______

donc $|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$

¤ Si $a < b$ f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ et $\forall x \in]a, b[$

on a : $|f'(x)| \leq M$ ⇨ ______ $f'(x)$ ______

⇨ ______________ $f(b) - f(a)$ ______________

⇨ $|f(b) - f(a)|$ ______________

¤ Si $a > b$ on a $|f(a) - f(b)| \leq$ ______________

⇨ $|f(b) - f(a)|$ ______________

* **Théorème** Soit f une fonction dérvable sur un intervalle I et M un réel strictement positif tel que $\forall x \in I$ on a : $|f'(x)| \leq M$

Alors pour tous réel a et b de I on a : ______________________________

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \tan x$

1) a) Etudier f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, en précisant la demi tangente au point d'abscisse 0.

b) Montrer que pour tout réel x de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\tan x \geq x$

2) a) Montrer que l'équation $\tan x = 2x$ admet autre que 0 une unique solution α dans $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right[$ et vérifier que $\alpha > \frac{\pi}{3}$

b) Déterminer le signe de $\tan x - 2x$ sur $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right[$

3) Soit (U_n) la suite définie par $U_0 = \frac{\pi}{3}$ et pour tout entier naturel n ; $U_{n+1} = \tan(U_n) - U_n$

a) Montrer que $0 \leq U_n \leq \frac{\pi}{3}$

b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante

c) Montrer que la suite (U_n) converge vers 0

Exercice 5

1) Montrer que l'équation (E) : $x^3 - 10x^2 - 1 = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α et vérifier que $\alpha \in]10\,,11[$

2) Vérifier que (E) est équivaut à $x = 10 + \frac{1}{x^2}$

3) Soit f la fonction définie sur $[10\,,+\infty[$ par $f(x) = 10 + \frac{1}{x^2}$

a) Déterminer $f([10\,,+\infty[)$.

4) Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = 10$ et $U_{n+1} = f(U_n)$

a) Montrer que $x \in [10\,,+\infty[$ on a : $f'(x) \leq \frac{1}{500}$

5) a) Montrer que $n \in \mathbb{N}$ on a : $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{500}|U_n - \alpha|$

b) En déduire que $|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{500}|U_0 - \alpha|$

c) Déterminer les six premières décimales de α

IV) Sens de variation d'une fonction

* ***Activité*** Soit f une fonction dérvable sur un intervalle I alors pour tous réels a et b de I tel que : $a < b$ f est continue sur $[a\,,b]$ et dérivable sur $]a\,,b[$ donc ______________________

______________________ donc ______________________

tel que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} =$ ________

d'où le théorème suivant

* ***Activité*** Soit f une fonction dérvable sur un intervalle I

¤ Si $\forall x \in I$ $f'(x) \geq 0$ (resp $f'(x) > 0$) alors la fonction f est ______________

(resp ______________________) sur I

¤ Si $\forall x \in I$ $f'(x) \leq 0$ (resp $f'(x) < 0$) alors la fonction f est ______________

(resp ______________________) sur I

¤ Si $\forall x \in I$ $f'(x) = 0$ alors la fonction f est _______________ sur I

* ***Théorème*** Soit I un intervalle de l'une des formes suivantes $[a\,,b]$ ou $[a\,,b[$ ou $]a\,,b]$ où a et b sont des réels tel que $a < b$ et f une fonction continue sur I et dérivable sur $]a\,,b[$

¤ Si $\forall x \in I$ $f'(x) \geq 0$ (resp $f'(x) > 0$) alors la fonction f est _______________

(resp ______________________) sur I

¤ Si $\forall x \in I$ $f'(x) \leq 0$ (resp $f'(x) < 0$) alors la fonction f est _______________

(resp ______________________) sur I

¤ Si $\forall x \in I$ $f'(x) = 0$ alors la fonction f est _______________ sur I

* ***Théorème*** Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I telle que sa fonction dérivée f' n'est nulle sur aucun intervalle contenu dans I

¤ Si $\forall x \in I$ $f'(x) \geq 0$ alors la fonction f est ______________________

¤ Si $\forall x \in I$ $f'(x) \leq 0$ alors la fonction f est ______________________

Exercice 6

1) On considère la fonction f définie sur $[0\,,2]$ par $f(x) = \sqrt{\frac{3}{4}x^2 + 1}$

   a) Vérifier que pour tout $x \in [0\,,2]$; $f'(x) = \frac{3}{4}\frac{x}{\sqrt{\frac{3}{4}x^2+1}}$

   b) Montrer que pour tout $x \in [0\,,2]$; $x \leq \sqrt{\frac{3}{4}x^2 + 1}$

   c) En déduire que pour tout $x \in [0\,,2]$; $0 \leq f'(x) \leq \frac{3}{4}$

   d) Montrer que pour tout $x \in [0\,,2]$; $0 \leq 2 - f(x) \leq \frac{3}{4}(2 - x)$

2) Soit (U_n) la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = f(U_n)$

   a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $0 < U_n < 2$

   b) Etudier la monotonie la limite de suite (U_n)

   c) Calculer la limite de suite (U_n)

3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $0 \leq 2 - U_{n+1} \leq \frac{3}{4}(2 - U_n)$

   a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $0 \leq 2 - U_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$

   b) Retrouver alors la limite de suite (U_n)

4) On considère la suite (S_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_{n-1}$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $2n - 4\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right) \leq S_n \leq 2n$

b) Calculer alors $\lim_{x \to +\infty} \frac{S_n}{n}$