Limites continuité image d'un intervalle Bac Math

I) Limite d'une fonction

1) Rappel

$$\lim_{x\to 1}(-x^3+x^2+x+1)=\cdots$$

$$\lim_{x\to +\infty}(-x^3+x^2+x+1)=\cdots$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+3x+2}{x^3-1}=\cdots$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x}{|x-1|}=\cdots$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}=\cdots$$

$$=\cdots$$

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{x^2-3x+2}{x^3-1}=\cdots$$

$$\lim_{x\to 6}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\cdots$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\cdots$$

… …

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}=$$

…

…

2) Calcul d'une limite par encadrement ou comparaison

Théorème : Soit f , g et h trois fonctions, $a\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ et $l\in\mathbb{R}$

Si ¤ **pour tout réel x voisin de a on a :**

$$\boldsymbol{g(x)\leq f(x)\leq h(x)}$$

¤ $\displaystyle\boldsymbol{\lim_{x\to a} g(x)=\lim_{x\to a} h(x)=l}$

alors $\displaystyle\boldsymbol{\lim_{x\to a} f(x)=l}$

Exercice 1

1) a) Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}^*$ on a : $-x^2\leq x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)\leq x^2$

b) En déduire $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

2) a) Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$ on a : $-x\leq x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\leq x$

b) Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}_-^*$ on a : $x\leq x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\leq -x$

c) En déduire $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Corollaire :

Soit f et g deux fonctions et $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

Si $\left\{\begin{array}{l} \text{¤ pour tout réel x voisin de a on a :} \\ \qquad |f(x)| \leq |g(x)| \\ \text{¤} \quad \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0 \end{array}\right.$

alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \cdots$

Exercice 2

1) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^*$ on a : $\left|x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x|$

2) En déduire $\lim\limits_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Théorème :

Soit f et g deux fonctions et $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

*** Si** $\left\{\begin{array}{l} \text{¤ pour tout réel x voisin de a on a :} \\ \qquad f(x) \geq g(x) \\ \text{¤} \quad \lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty \end{array}\right.$

alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \cdots$

*** Si** $\left\{\begin{array}{l} \text{¤ pour tout réel x voisin de a on a :} \\ \qquad f(x) \leq g(x) \\ \text{¤} \quad \lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty \end{array}\right.$

alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \cdots$

Exercice 3

1) Montrer que $\forall \in \mathbb{R}$ on a : $x - 1 \leq x + \cos x \leq x + 1$

2) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} (x + \cos x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (x + \cos x)$

3) Limite d'une fonction monotone

Théorème :

Soit f une fonction, $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$

*** Si f est croissante et non majorée sur l'intervalle $]a, b[$**

(resp sur $]a, +\infty[$)

alors $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = \cdots$ **(resp** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \cdots$**)**

*** Si f est croissante et majorée sur l'intervalle $]a, b[$**

(resp sur $]a, +\infty[$)

alors f …

Théorème

Soit f une fonction, $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$

*** Si f est décroissante et non minorée sur l'intervalle $]a, b[$**

(resp sur $]a, +\infty[$)

alors $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = \cdots$ **(resp** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \cdots$**)**

*** Si f est décroissante et minorée sur l'intervalle $]a, b[$**

(resp sur $]a, +\infty[$)

alors f …

4) Limite et ordre

Soit f une fonction, $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $l \in \mathbb{R}$

* $\begin{cases} \textbf{Si pour tout réel } x \textbf{ voisin de } a \textbf{ on a :} \\ f(x) \geq 0 \text{ ou } f(x) > 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$

alors l …

* $\begin{cases} \textbf{Si pour tout réel } x \textbf{ voisin de } a \textbf{ on a :} \\ f(x) \leq 0 \text{ ou } f(x) < 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$

alors l …

Activité

Soit f et g deux fonctions ; $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$; $l \in \mathbb{R}$ et $l' \in \mathbb{R}$

tel que pour tout réel x voisin de a on a : $f(x) \leq g(x)$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = l'$

alors : ….

* pour tout réel x voisin de a on a :

$f(x) - g(x) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad (f-g)(x)$ …

* $\lim\limits_{x \to a} (f-g)(x) = \lim\limits_{x \to a} (f(x) - g(x)) = \cdots$

d'où $l - l'$ … $\quad \Rightarrow \quad l$ … l'

Théorème

Soit f et g deux fonctions ; $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$; $l \in \mathbb{R}$ et $l' \in \mathbb{R}$

Si pour tout réel x voisin de a on a :

$$\begin{cases} f(x) \leq g(x) \\ \lim\limits_{x \to a} f(x) = l \\ \lim\limits_{x \to a} g(x) = l' \end{cases}$$

alors l … l'

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur IR par

$$f(x) = \begin{cases} \left(1 + \frac{1}{x-2}\right)|x-2| & \text{si } x \neq 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

Etudier la continuité de f sur IR

Exercice 5

Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{x+3}{\sqrt{|x^2+x-6|}}$

1) Déterminer le domaine de définition de f
2) Montrer que f est prolongeable par continuité en -3 et déterminer son prolongement

Exercice 6

On considère les fonctions : $f : \mapsto \frac{1+\cos x}{\sqrt{x}}$; $g : \mapsto \frac{x \sin^4 x}{2x^2+1}$ et

$h : \mapsto -x^3 + 3\sin x$

1) Montrer que pour $x \geq 1$ les inégalités suivantes

$|f(x)| \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$; $|g(x)| \leq \frac{1}{2x^2}$ et $h(x) \leq -x^3 + 3$

2) En déduire les limites en $+\infty$ de ces fonctions

Exercice 7

on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2x\sin x}{1+x^2}$

1) a) Montrer que por tout réel x, $|xf(x)| \leq 2$

b) En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{(\pi-2x)\cos x}{1+\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}$

II) Limite et continuité d'une fonction composée

1) Définition

Soit f et g deux fonctions, la fonction, notée $g\ o\ f$; et définie par $(g\ o\ f)(x) = g[f(x)]$ est dite une fonction composée des fonctions f et g

Exercice 8

On considère les fonctions f et g définies par ;

$f(x) = \sqrt{x-2}$ $\quad g(x) = \frac{1+x}{x^2}$

1) Donner les domaines de définition de f et g

2) a) Calculer $(g\ o\ f)(6)$ et $(f\ o\ g)(1)$

b) Peut-on calculer $(g\ o\ f)(0)$ et $(g\ o\ f)(2)$

3) Déterminer les domaines de définition des fonctions $g\ o\ f$ et $f\ o\ g$

4) Exprimer en fonction de x ; $(g\ o\ f)(x)$ et $(f\ o\ g)(x)$

2) Limite d'une fonction composée

Théorème

Soit f et g deux fonctions et $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

Si $\begin{cases} \lim\limits_{x\to a} f(x) = l & \textbf{avec } l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \\ \lim\limits_{x\to l} g(x) = l' & \textbf{avec } l' \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \end{cases}$

alors : $\lim\limits_{x\to a} (g\ o\ f)(x) = l'$

Corollaire

Soit f et g deux fonctions et $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ **avec** $\underline{l \in \mathbb{R}}$

g est continue en l alors : $\lim\limits_{x\to a} (g\ o\ f)(x) = \cdots$

Exemples

* Soit à calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \cdots$

La fonction $x \mapsto \sin x$ est continue en …

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \cdots \qquad = \cdots$

* Soit à calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos\left(\frac{\pi x}{x+1}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\pi x}{x+1} = \cdots \qquad\qquad = \cdots \qquad\qquad = \cdots$

La fonction $x \mapsto \cos x$ est continue en …

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos\left(\frac{\pi x}{x+1}\right) = \cdots \qquad\qquad = \cdots$

* Soit à calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = ?$

On pose $X = \frac{1}{x}$ lorsque $x \to +\infty$ alors $X \to \cdots$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{X\to 0} \ldots$

$= \cdots \qquad\qquad = \cdots$

3) Continuité d'une fonction composée

Activité

Soit f et g deux fonctions et $a \in \mathbb{R}$.

Supposons que f est continue en a et g est continue en $f(a)$

¤ f est continue en a donc $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \cdots$

¤ g est continue en $f(a)$

donc $\lim\limits_{x\to a} (g \circ f)(x) = \cdots \qquad\qquad = \cdots$

donc la fonction $g \circ f$ est …

Théorème

Soit f et g deux fonctions et $a \in \mathbb{R}$.

Si $\begin{cases} f \text{ est continue en } a \\ g \text{ est continue en } f(a) \end{cases}$

alors $g \circ f$ est …

Conséquence

Soit f et g deux fonctions

Si $\begin{cases} f \text{ est continue sur un intervalle } I \\ g \text{ est continue sur un intervalle } J \\ \forall x \in I\ ;\ f(x) \in J \end{cases}$

alors $g \circ f$ est …

Exemples Montrons que $f : x \mapsto \sin\left(x^2 + \frac{\pi}{4}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}$

¤ la fonction $x \mapsto \ldots$ est continue sur ...

¤ la fonction $x \mapsto \ldots$ est continue sur ...

¤ $\forall x \in \cdots$ on a …

donc f est continue sur $\mathbb{R}$

* Montrons que $g : x \mapsto \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ est continue sur $]-1\,,1[$

¤ la fonction $x \mapsto \ldots$ est continue sur ...

¤ la fonction $x \mapsto \ldots$ est continue sur ...

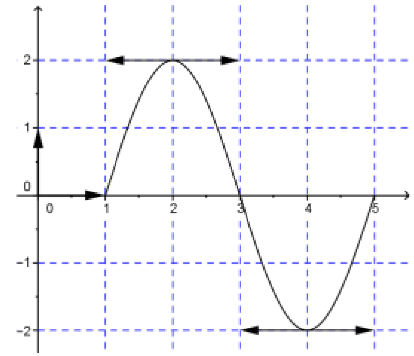
¤ $\forall x \in]-1\,,1[$ on a : $-1 < x < 1 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \ldots$

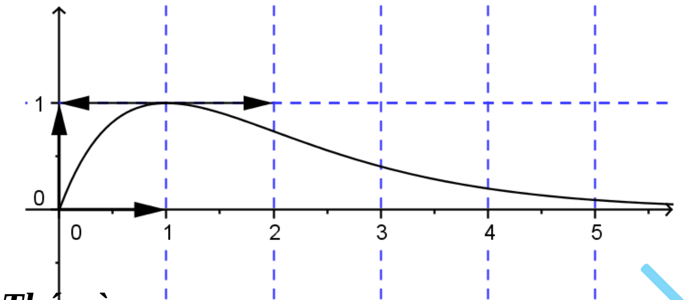
donc g est continue sur $\ldots$

III) Image d'un intervalle par une fonction continue

Activité Dans chacun des cas suivants, déterminer l'image de l'intervalle par la fonction f.



$f([1\,,4]) = \cdots$



$f([0\,,+\infty[) = \cdots$

Théorème

¤ L'image d'un intervalle par une fonction continue est …

¤ L'image d'un intervalle fermé borné $[a\,,b]$ par une fonction continue est …

où m est le … et **M est le …**

Image d'un intervalle par une fonction continue est strictement monotone

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I. On a :

Forme de I	$f(I)$	
	f est strict $\nearrow$	f est strict $\searrow$
$[a\,,b]$ $a \in \mathbb{R}\,;b \in \mathbb{R}$	…	…
$[a\,,b[$ $a \in \mathbb{R}\,;b \in \mathbb{R}$	…	…
$[a\,,+\infty[$ $a \in \mathbb{R}$	…	…
$]a\,,b]$ $a \in \mathbb{R}\,;b \in \mathbb{R}$	…	…
$]-\infty\,,b]\,;b \in \mathbb{R}$	…	…

Exercice 9

Soit la fonction f définie par : $f(x) = x^3 - 3x + 1$

1) Dresser le tableau de variation de f.

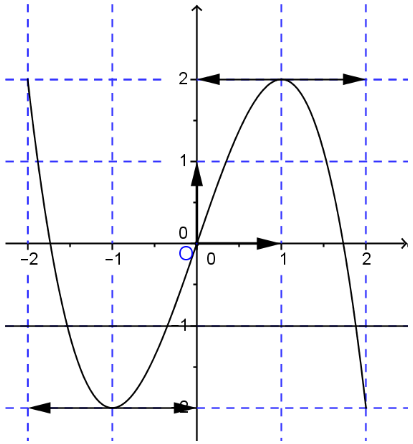
2) Déterminer les images par f des intervalles :

$[-1\,,1]\,;[1\,,+\infty[$

$]-\infty\,,-1[$ et $[-2\,,1]$

IV) Etude des équations de la forme $f(x) = k$

Activité



La droite D : $y = -1$ coupe la courbe en 3 points donc l'équation $f(x) = \cdots$ admet dans l'intervalle $[-2\,,2]$ … solutions.

Théorème des valeurs intermédiaires

¤ Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,,b]$ et k un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

Alors l'équation $f(x) = k$ admet …

¤ Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a\,,b]$ et k un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

Alors l'équation $f(x) = k$ admet dans $[a\,,b]$ …

Corollaire

¤ Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,,b]$.

Si $f(a) \times f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet dans $[a\,,b]$ …

¤ Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a\,,b]$.

Si $f(a) \times f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet dans $[a\,,b]$ …

Corollaire

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.

Si f ne s'annule en aucun point de I alors f garde … sur I

Exercice 10

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^3 + 2x - 3$

1) Montrer que l'équation $f(x) = -2$ admet au moins une solution dans $[0\,,1]$.

2) Montrer que l'équation $f(x) = 15$ admet au moins une solution dans $[0\,,+\infty[$.

3) a) Montrer que l'équation $f(x) = -x$ admet dans $[-1\,,1]$ une unique solution α.

b) Déterminer une valeur approchée de α par défaut à 0,5 prés