CORRECTION SUITES REELLES 4ème Mathématiques

Exercice 3

1) Pour $n = 1$ on a : $U_1 = 1$ donc $0 \leq U_1 \leq 3$ vrai

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ supposons que $0 \leq U_n \leq 3$ et montrons que $0 \leq U_{n+1} \leq 3$

$0 \leq U_n \leq 3 \Rightarrow 0 \leq 3U_n \leq 9 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{3U_n} \leq \sqrt{9} \Rightarrow 0 \leq \sqrt{3U_n} \leq 3 \Rightarrow 0 \leq U_{n+1} \leq 3$

Conclusion $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $0 \leq U_n \leq 3$.

2) $U_{n+1} - U_n = \sqrt{3U_n} - U_n = \dfrac{3U_n - {U_n}^2}{\sqrt{3U_n} + U_n} = \dfrac{U_n \overbrace{(3 - U_n)}^{+}}{\sqrt{3U_n} + U_n} > 0$

Or $0 \leq U_n \leq 3 \Rightarrow -3 \leq -U_n \leq 0 \Rightarrow 0 \leq 3 - U_n \leq 3$

Donc la suite U est croissante.

3) On a la suite U est croissante et majorée donc U est convergente.

Soit $f(x) = \sqrt{3x}$ f est continue sur $[0 + \infty[$

On a : $U_{n+1} = f(U_n)$ avec $f(x) = \sqrt{3x}$ continue sur $[0 + \infty[$

on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = L$ avec $L \in [0\,, 3]$ donc f est continue en L

$U_{n+1} = f(U_n)$ donc $f(L) = L \Leftrightarrow \sqrt{3L} = L \Leftrightarrow 3L = L^2 \Leftrightarrow L^2 - 3L = 0 \Leftrightarrow L(L - 3) = 0$

Donc $L = 0$ ou $L = 3$ or la suite U est croissante donc $L = 3$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 3$

Exercice 4

1) a) On a : $\forall x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)' = \frac{2(1+x^2) - 2x \times 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$

alors $f'(x)$ est du signe de $1 - x^2$ sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

$f(-1) = -1$ $\qquad f(1) = 1$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x}{1 + x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2}{x} = 0$ $\qquad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{1 + x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x} = 0$

b) f est continue et strictement croissante sur $\left[\frac{1}{2}\,, 1\right]$ $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{5}$ et $f(1) = 1$ alors $f\left(\left[\frac{1}{2}\,, 1\right]\right) = \left[\frac{4}{5}\,, 1\right]$

par suite $\forall x \in \left[\frac{1}{2}\,, 1\right]$ $\frac{4}{5} \leq f(x) \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{4}{5} \leq f(x) \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq f(x) \leq 1$

On a $U_0 = \frac{1}{2}$; $\qquad \frac{1}{2} \leq U_0 \leq 1$ la propriété est vraie pour $n = 0$

soit $n \in \mathbb{N}$ supposons que $\frac{1}{2} \leq U_n \leq 1$ montrons que $\frac{1}{2} \leq U_{n+1} \leq 1$

on a $U_{n+1} = f(U_n)$

$\forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$; $\frac{1}{2} \leq f(x) \leq 1$ or $\frac{1}{2} \leq U_n \leq 1$ alors $\frac{1}{2} \leq f(U_n) \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq U_{n+1} \leq 1$

Conclusion $\forall n \in \mathbb{N}$ $\frac{1}{2} \leq U_n \leq 1$

c) On a $U_{n+1} - U_n = \frac{2U_n}{1+(U_n)^2} = \frac{U_n-(U_n)^2}{1+(U_n)^2} = \frac{U_n(1-(U_n)^2)}{1+(U_n)^2} = \frac{\overbrace{U_n(1+U_n)(1-U_n)}^{+}}{\underbrace{1+(U_n)^2}_{+}} > 0$

or $\frac{1}{2} \leq U_n \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 1 - U_n \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - U_n > 0$ alors $U_{n+1} - U_n > 0$

donc la suite U est croissante et elle est majorée alors elle est convergente

d) On a : $U_{n+1} = f(U_n)$ avec $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ continue sur $\mathbb{R}$

on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = L$ avec $\frac{1}{2} \leq L \geq 1$ donc f est continue en L

donc $f(L) = L \Leftrightarrow \frac{2L}{1+L^2} = L \Leftrightarrow 2L = L + L^2 \Leftrightarrow L^2 - L = 0 \Leftrightarrow L(L-1) = 0 \Rightarrow L = 0$ ou $L = 1$

or $\frac{1}{2} \leq L \geq 1$ donc $L = 1$

2) a) $V_{n+1} = 1 - U_{n+1} = 1 - \frac{2U_n}{1+(U_n)^2} = \frac{1+(U_n)^2-2U_n}{1+(U_n)^2} = \frac{(1-U_n)^2}{1+(U_n)^2} = \frac{(V_n)^2}{1+(U_n)^2} = \frac{V_n}{1+(U_n)^2}V_n$

Or $\frac{1}{2} \leq U_n \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{4} \leq (U_n)^2 \leq 1 \Rightarrow \frac{5}{4} \leq 1 + (U_n)^2 \leq 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+(U_n)^2} \leq \frac{4}{5}$

$V_n = 1 - U_n$ et $\frac{1}{2} \leq U_n \leq 1$ alors $0 \leq V_n \leq \frac{1}{2}$ par suite

$0 \leq \frac{V_n}{1+(U_n)^2} \leq \frac{2}{5} \Rightarrow 0 \leq \frac{V_n}{1+(U_n)^2}V_n \leq \frac{2}{5}V_n \Rightarrow 0 \leq V_{n+1} \leq \frac{2}{5}V_n$

b) $\forall n \in \mathbb{N}$; $0 \leq V_{n+1} \leq \frac{2}{5}V_n$

$0 \leq V_1 \leq \frac{2}{5}V_0$

$0 \leq V_2 \leq \frac{2}{5}V_1$

$0 \leq V_3 \leq \frac{2}{5}V_2$

.

.

.

$0 \leq V_{n-1} \leq V_{n-2}$

$0 \leq V_n \leq \frac{2}{5}V_{n-1}$

en multipliant les n inégalités membre à membre :

$0 \leq V_n \leq \left(\frac{2}{5}\right)^n V_0$ alors $0 \leq V_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n$

c) On a $\forall n \in \mathbb{N}$; $0 \leq V_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n$ alors

$0 \leq V_0 \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^0$

$0 \leq V_1 \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^1$

$0 \leq V_2 \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^2$

.

.

$0 \leq V_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n$

en additionnant les n inégalités membre à membre :

$$0 \leq V_0 + V_1 + V_2 + \cdots + V_n \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^2 \ldots + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n \Rightarrow$$

$$0 \leq \sum_{k=0}^{n} V_k \leq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{5} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 \ldots + \left(\frac{2}{5}\right)^n\right)$$

Soit la suite W définie sur $\mathbb{N}$ par $W_n = 1 + \frac{2}{5} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 \ldots + \left(\frac{2}{5}\right)^n$

On remarque bien que la suite W est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de 1er terme 1 et de raison $q = \frac{2}{5}$ alors :

$W_n = \frac{1 \times \left[1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right]}{1-\frac{2}{5}} = \frac{5}{3}\left[1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right]$ alors $\frac{1}{2} W_n = \frac{5}{6}\left[1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right]$ par suite

$0 \leq \sum_{k=0}^{n} V_k \leq \frac{5}{6}\left[1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right]$ alors $0 \leq S_n \leq \frac{5}{6}\left[1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right]$

d) On a : $0 \leq S_n \leq \frac{5}{6}\left[1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right]$ alors $0 \leq \frac{S_n}{n} \leq \frac{\frac{5}{6}\left[1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right]}{n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5}{6}\left[1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right] = \frac{5}{6}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\frac{5}{6}\left[1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right]}{n} = 0$

$$\begin{cases} 0 \leq \frac{S_n}{n} \leq \frac{\frac{5}{6}\left[1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right]}{n} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\frac{5}{6}\left[1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right]}{n} = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n} = 0$$

Exercice 6

1) $U_1 = \frac{2U_0+V_0}{3} = \frac{1}{3}$ $\quad V_1 = \frac{3U_0+2V_0}{5} = \frac{2}{5}$

2) On a pour $n = 0$ on a : $U_0 \leq V_0$ vrai

Soit $n \in \mathbb{N}$ supposons que $U_n \leq V_n$ montrons que $U_{n+1} \leq V_{n+1}$

$$U_{n+1} - V_{n+1} = \frac{2U_n + V_n}{3} - \frac{3U_n + 2V_n}{5} = \frac{10U_n + 5V_n}{15} - \frac{9U_n + 6V_n}{15} = \frac{U_n - V_n}{15} \leq 0 \text{ donc } U_{n+1} \leq V_{n+1}$$

conclusion $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n \leq V_n$

3) $U_{n+1} - U_n = \frac{2U_n+V_n}{3} - U_n = \frac{-(U_n-V_n)}{3} > 0$ donc la suite (U_n) est croissante.

$V_{n+1} - V_n = \frac{3U_n+2V_n}{5} - V_n = \frac{3(U_n-V_n)}{5} < 0$ donc la suite (V_n) est décroissante.

4) **La** suite (V_n) est décroissante alors $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $V_n \leq V_0$ alors $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $V_n \leq 1$

Or $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n \leq V_n$ alors $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n \leq 1$

La suite (U_n) est croissante et majorée par donc (U_n) est convergente et converge vers un réel L.

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = L$

La suite (U_n) est croissante alors $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n \geq U_0$ alors $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n \geq 0$

Or $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n \leq V_n$ alors $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $V_n \geq 0$

La suite (V_n) est décroissante et minorée par 0 donc (V_n) est convergente et converge vers un réel L'.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = L'$

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_{n+1} = L$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} U_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2U_n+V_n}{3} = \frac{2\beta+\beta'}{3}$ donc $\frac{2L+L'}{3} = L$

donc $2L + L' = 3L$ donc $L = L'$

5) **a)** On a : $W_0 = 9U_0 + 5V_0 = 5$ supposons que $W_n = 5$ et montrons que $W_{n+1} = 5$

$W_{n+1} = 9U_{n+1} + 5V_{n+1} = 9 \times \frac{2U_n+V_n}{3} + 5 \times \frac{3U_n+2V_n}{5} = 6U_n + 3V_n + 3U_n + 2V_n = 9U_n + 5V_n = W_n$

Conclusion $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $W_n = 5$

b) On a : $W_n = 5$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = 5$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 9U_n + 5V_n = 5$

or $\lim\limits_{n\to+\infty} 9U_n + 5V_n = 9L + 5L = 14L$ donc $14L = 5$ donc $L = \frac{5}{14}$

Exercice 9

1) On a $U_1 = 1$, $U_2 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_{n+2} = 6U_{n+1} - 8U_n$ et $W_n = \frac{U_{n+1}}{U_n}$

a) On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $W_{n+1} = \frac{U_{n+2}}{U_{n+1}} = \frac{6U_{n+1}-8U_n}{U_{n+1}} = 6 - \frac{-8U_n}{U_{n+1}} = 6 - \frac{8}{\frac{U_{n+1}}{U_n}} = 6 - \frac{8}{W_n}$

b) Pour $n = 1$, on a : $W_1 = \frac{U_2}{U_1} = \frac{3}{1} = 3$, $2 < W_1 < 4$ vrai

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ supposons que $2 < W_n < 4$ et montrons que $2 < W_{n+1} < 4$

On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $W_{n+1} = 6 - \frac{8}{W_n}$

$2 < W_n < 4 \Rightarrow \frac{1}{4} \leq \frac{1}{W_n} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 2 \leq \frac{8}{W_n} \leq 4 \Rightarrow -4 \leq \frac{-8}{W_n} \leq -2 \Rightarrow 2 \leq 6 - \frac{8}{W_n} \leq 4 \Rightarrow 2 < W_{n+1} < 4$

Conclusion $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a $2 < W_n < 4$

c) $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $W_{n+1} - W_n = 6 - \frac{8}{W_n} - W_n = \frac{6W_n - 8 - W_n^2}{W_n} = \frac{-W_n^2 + 6W_n - 8}{W_n}$

Soit $p(x) = -x^2 + 6x - 8$, $p(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 6x - 8 = 0$

$\Delta = 36 - 32 = 4$ $\sqrt{\Delta} = 2$ $x' = \frac{-6-2}{-2} = 4$ $x'' = \frac{-6+2}{-2} = 2$

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$p(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

donc pour tout $2 < x < 4$ on a $p(x) > 0$ or $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a $2 < W_n < 4$ donc $p(W_n) > 0$ et $W_n > 0$

par suite $W_{n+1} - W_n > 0$ donc la suite w est croissante

d) La suite w est croissante et majorée par 4 donc la suite w est convergente et converge vers un réel α

Soit $(x) = 6 - \frac{8}{x}$, f est continue sur $\mathbb{R}^*$

$\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = \alpha \qquad 2 < \alpha < 4 \quad f$ est continue en α

$W_{n+1} = f(W_n)$ donc $f(\alpha) = \alpha \iff 6 - \frac{8}{\alpha} = \alpha \iff \frac{6\alpha}{\alpha} - \frac{8}{\alpha} = \alpha \iff \frac{6\alpha - 8}{\alpha} = \alpha \iff 6\alpha - 8 = \alpha^2$

$\iff -\alpha^2 + 6\alpha - 8 = 0 \iff \alpha = 2$ ou $\alpha = 4$ or la suite est croissante donc $\alpha = 4$

par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = 4$

2) On $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $t_n = \frac{W_n - 4}{W_n - 2}$

a) On $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $t_{n+1} = \frac{W_{n+1}-4}{W_{n+1}-2} = \frac{6-\frac{8}{W_n}-4}{6-\frac{8}{W_n}-2} = \frac{2-\frac{8}{W_n}}{4-\frac{8}{W_n}} = \frac{2W_n-8}{4W_n-8} = \frac{2(W_n-4)}{4(W_n-2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{W_n-4}{W_n-2}\right) = \frac{1}{2}t_n$

par suite la suite t est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$

b) On a la suite t est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $t_1 = \frac{W_1-4}{W_1-2} = \frac{3-4}{3-2} = -1$

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $t_n = (-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

d'autre part on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\quad t_n = \frac{W_n-4}{W_n-2} \iff t_n(W_n - 2) = W_n - 4 \iff t_nW_n - 2t_n = W_n - 4 \iff$

$W_n(t_n - 1) = 2t_n - 4 \iff W_n = \frac{2t_n-4}{t_n-1} = \frac{2(t_n-2)}{t_n-1} = \frac{2\left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-2\right)}{-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-1} = \frac{2\left(\frac{1}{2^{n-1}}+2\right)}{\frac{1}{2^{n-1}}+1} = \frac{2(1+2\times2^{n-1})}{1+2^{n-1}} = \frac{2(1+2^n)}{1+2^{n-1}}$

c) On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\quad W_n = \frac{U_{n+1}}{U_n} \iff U_{n+1} = U_n \times W_n$

$\cancel{U_2} = U_1 \times W_1$

$\cancel{U_3} = \cancel{U_2} \times W_2$

$\cancel{U_4} = \cancel{U_3} \times W_3$

.

.

.

$\cancel{U_{n-1}} = \cancel{U_{n-2}} \times W_{n-2}$

$U_n = \cancel{U_{n-1}} \times W_{n-1}$

donc $U_n = W_1 \times W_2 \times W_3 \times \dots \times W_{n-1}$

$= \frac{2(1+2^1)}{1+2^0} \times \frac{2(1+2^2)}{1+2^1} \times \frac{2(1+2^3)}{1+2^2} \times \dots \times \frac{2(1+2^{n-1})}{1+2^{n-2}}$

$= \cancel{(1+2^1)} \times \frac{2\cancel{(1+2^2)}}{\cancel{1+2^1}} \times \frac{2\cancel{(1+2^3)}}{\cancel{1+2^2}} \times \dots \times \frac{2(1+2^{n-1})}{\cancel{1+2^{n-2}}}$

$= 2^{n-2}(1 + 2^{n-1})$

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \underbrace{2^{n-2}}_{+\infty}\left(1+\underbrace{2^{n-1}}_{+\infty}\right) = +\infty$

Exercice 11

1) On a : $\mathrm{U_{n+1}} - \mathrm{U_n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} > 0$

Donc la suite U est croissante.

2) On a pour $n=1$ $\quad U_2 - U_1 = 1+\frac{1}{2}-1 = \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$ vrai pour $n=1$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ supposons que $U_{2n} - U_n \geq \frac{1}{2}$ et montrons que $U_{2n+2} - U_{n+1} \geq \frac{1}{2}$

$$U_{2n+2} - U_{n+1} = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}$$

$$= U_{2n} - U_n + \frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}$$

$$= U_{2n} - U_n + \frac{(2n+2)(n+1)}{(2n+1)(2n+2)(n+1)}+\frac{(2n+1)(n+1)}{(2n+1)(2n+2)(n+1)}-\frac{(2n+1)(2n+2)}{(2n+1)(2n+2)(n+1)}$$

$$= U_{2n} - U_n + \frac{2n^2+4n+2+2n^2+3n+1-4n^2-6n-2}{(2n+1)(2n+2)(n+1)} = U_{2n} - U_n + \frac{n+1}{(2n+1)(2n+2)(n+1)}$$

Or $U_{2n} - U_n \geq \frac{1}{2}$ et $\frac{n+1}{(2n+1)(2n+2)(n+1)} > 0$ alors $U_{2n+2} - U_{n+1} \geq \frac{1}{2}$ Conclusion $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $U_{2n} - U_n \geq \frac{1}{2}$

3) Supposons que la suite U est majorée par un réel L alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = L$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} U_{2n} = L$

Ce qui donne $\lim\limits_{n\to+\infty} U_{2n} - \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$ ce qui est absurde car $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $U_{2n} - U_n \geq \frac{1}{2}$

donc la suite U n'est pas majorée.

4) La suite U est croissante et n'est pas majorée alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n + \infty$

Exercice 13

1) a) Pour $n=0$ on a : $U_0 = 0$ donc $0 \leq U_0 \leq 1$ vrai.

Soit $n \in \mathbb{N}$ supposons que $0 \leq U_n \leq 1$, montrons que $0 \leq U_{n+1} \leq 1$

$$U_{n+1} = \frac{2U_n+3}{U_n+4} = \frac{2(U_n+4)-5}{U_n+4} = 2+\frac{-5}{U_n+4}$$

$$0 \leq U_n \leq 1 \Rightarrow 4 \leq U_n+4 \leq 5 \Rightarrow \frac{1}{5} \leq \frac{1}{U_n+4} \leq \frac{1}{4} \Rightarrow 1 \leq \frac{5}{U_n+4} \leq \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{-5}{4} \leq \frac{-5}{U_n+4} \leq -1$$

$$\frac{3}{4} \leq 2+\frac{-5}{U_n+4} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 2+\frac{-5}{U_n+4} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq U_{n+1} \leq 1$$

Conclusion $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq U_n \leq 1$

b) $U_{n+1} - U_n = \dfrac{2U_n+3}{U_n+4} - U_n = \dfrac{-U_n{}^2 - 2U_n + 3}{U_n+4} = \dfrac{-\overbrace{(U_n-1)}^{+}\overbrace{(U_n+3)}^{+}}{\underbrace{U_n+4}_{+}} < 0$

Donc la suite (U_n) est croissante.

c) La suite (U_n) est croissante et majorée donc (U_n) est convergente.

On a : $U_{n+1}=f(U_n)$ avec $f(x)=\frac{2x+3}{x+4}$ continue sur $\mathbb{R}\setminus\{-4\}$

on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=L$ avec $0\le L\le 1$ donc f est continue en L

$U_{n+1}=f(U_n)$ donc $f(L)=L \Leftrightarrow \frac{2L+3}{L+4}=L \Leftrightarrow 2L+3=L^2+4L \Leftrightarrow L^2+2L-3=0$

Donc $L=1$ ou $L=-3$ or $L\in[0\,,1]$ donc $L=1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=1$

2) **a)** $\mathrm{V_n}=\dfrac{U_n-1}{U_n+3}$ $\quad \mathrm{V_{n+1}}=\dfrac{U_{n+1}-1}{U_{n+1}+3}=\dfrac{\frac{2U_n+3}{U_n+4}-1}{\frac{2U_n+3}{U_n+4}+3}=\dfrac{U_n-1}{5U_n+15}=\dfrac{U_n-1}{5(U_n+3)}=\dfrac{1}{5}\times\dfrac{U_n-1}{U_n+3}=\dfrac{1}{5}\mathrm{V_n}$

Donc la suite (V_n) est une suite géométrique da raison $q=\frac{1}{5}$ et de premier terme $\mathrm{V_0}=\frac{U_0-1}{U_0+3}=-\frac{1}{3}$

b) On a : $q=\frac{1}{5}$ donc $-1<q<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{V_n}=0$

$$\sum_{k=0}^{n}\mathrm{V_k}=-\frac{1}{3}\times\frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{5}}=-\frac{5}{12}\times\left(1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\mathrm{V_k}=\lim_{n\to+\infty}-\frac{5}{12}\times\left(1-\overbrace{\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}^{0}\right)=-\frac{5}{12}$$

c) On a (V_n) est une suite géométrique da raison $q=\frac{1}{5}$ et de premier terme $\mathrm{V_0}=-\frac{1}{3}$ donc

$$V_n=-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^{\mathrm{n}}$$

$$V_n=\frac{U_n-1}{U_n+3}\Leftrightarrow V_nU_n+3V_n=U_n-1\Leftrightarrow U_n(V_n-1)=-3V_n-1\Leftrightarrow U_n=\frac{-3V_n-1}{V_n-1}$$

$$\Leftrightarrow U_n=\frac{-3\left[-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^{\mathrm{n}}\right]-1}{-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^{\mathrm{n}}-1}=\frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{\mathrm{n}}-1}{-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^{\mathrm{n}}-1}\ \text{donc}\quad \lim_{n\to+\infty}U_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{\overbrace{\left(\frac{1}{5}\right)^{\mathrm{n}}}^{0}-1}{\underbrace{-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^{\mathrm{n}}}_{0}-1}=1$$

Exercice 15

1) ***a)*** $1-\dfrac{1}{k^2}=\left(1-\dfrac{1}{k}\right)\left(1+\dfrac{1}{k}\right)=\left(\dfrac{k-1}{k}\right)\left(\dfrac{k+1}{k}\right)$

b) $1-\dfrac{1}{2^2}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{2}$

$1-\dfrac{1}{3^2}=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{4}{3}$

.

.

$1-\dfrac{1}{n^2}=\left(\dfrac{n-1}{n}\right)\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$

En multipliant les égalités membre à membre :

$$U_n = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\dots\times\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{2}\times\frac{n+1}{n} = \frac{n+1}{2n}$$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{2n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\mathrm{n}\left(1+\frac{1}{\mathrm{n}}\right)}{2\mathrm{n}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}+\frac{1}{2\mathrm{n}} = \frac{1}{2}$$

2) a) $V_n = 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\frac{1}{\sqrt{n}}$ $\qquad V_{n+1} = 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}$

$$V_{n+1}-V_n = 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} > 0$$

donc $V_{n+1}-V_n > 0$ donc la suite (V_n) est croissante.

b) $V_{2n}-V_n = 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n}}-\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

$$= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n}}}_{n \text{ termes}}$$

or $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{2n}}$

$\frac{1}{\sqrt{n+2}} \geq \frac{1}{\sqrt{2n}}$

.

.

$\frac{1}{\sqrt{2n}} \geq \frac{1}{\sqrt{2n}}$

en additionnant les égalités membre à membre : $\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n}} \geq \frac{n}{\sqrt{2n}}$

or $\frac{n}{\sqrt{2n}} = \frac{n}{\sqrt{2}\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\sqrt{n} \geq 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$

donc $V_{2n}-V_n \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$

c) La suite (V_n) est croissante, pour montrer qu'elle diverge vers $(+\infty)$, il suffit de montrer qu'elle n'est pas majorée.

Supposons que la suite (V_n) est majorée alors elle converge vers un réel β dans ce cas la suite (V_{2n}) converge aussi vers β, alors $\lim_{n\to+\infty} V_n = \beta$ et $\lim_{n\to+\infty} V_{2n} = \beta$ donc $\lim_{n\to+\infty} V_{2n}-V_n = 0$

or $V_{2n}-V_n \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} V_{2n}-V_n \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 0 \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ ce qui est absurde.

Donc la suite (V_n) n'est pas majorée alors elle diverge vers $(+\infty)$

Exercice 16

1) Pour $n = 0$ on a : $U_0 = a$ et $V_0 = b$ et on a : $0 < a < b$ donc $0 < U_0 < V_0$ vrai

Soit $n \in \mathbb{N}$ supposons que $0 < U_n < V_n$ montrons que $0 < U_{n+1} < V_{n+1}$

On a $U_n > 0$ et $V_n > 0 \Rightarrow 2U_nV_n > 0$ et $U_n+V_n > 0$ donc $\frac{2U_nV_n}{U_n+V_n} > 0$ alors $U_{n+1} > 0$ **(1)**

$$U_{n+1}-V_{n+1} = \frac{2U_nV_n}{U_n+V_n}-\frac{U_n+V_n}{2} = \frac{4U_nV_n-(U_n+V_n)^2}{2(U_n+V_n)} = \frac{4U_nV_n-((U_n)^2+2U_nV_n+(V_n)^2)}{2(U_n+V_n)}$$

$$= \frac{-((U_n)^2 + 2U_nV_n + (V_n)^2)}{2(U_n + V_n)} = \frac{-(U_n + V_n)^2}{2(U_n + V_n)} < 0$$

donc $U_{n+1} - V_{n+1} < 0 \Rightarrow U_{n+1} < V_{n+1}$ **(2)**

de **(1)** et **(2)** on a : $0 < U_{n+1} < V_{n+1}$

conclusion $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 < U_n < V_n$

$$\textbf{2)}\ U_{n+1} - U_n = \frac{2U_nV_n}{U_n + V_n} - U_n = \frac{2U_nV_n - (U_n)^2 - U_nV_n}{U_n + V_n} = \frac{U_nV_n - (U_n)^2}{U_n + V_n} = \frac{U_n(V_n - U_n)}{U_n + V_n}$$

or $U_n < V_n \Rightarrow V_n - U_n > 0$ alors $U_{n+1} - U_n > 0$ alors la suite U est croissante

$$V_{n+1} - V_n = \frac{U_n + V_n}{2} - V_n = \frac{U_n - V_n}{2}$$

or $U_n < V_n \Rightarrow U_n - V_n < 0$ alors $V_{n+1} - V_n < 0$ alors la suite V est décroissante

3) La suite V est décroissante donc $V_n < V_0$ donc $V_n < b$ et $U_n < V_n$ alors $U_n < b$

donc la suite U est majorée

la suite U est croissante et majorée alors la suite U est convergente.

La suite U est croissante donc $U_n > U_0$ donc $U_n > a$ et $U_n < V_n$ alors $V_n > b$

donc la suite V est minorée.

la suite V est décroissante et minorée alors la suite V est convergente.

$$\textbf{2) a)}\ V_{n+1} - U_{n+1} - \frac{1}{2}(V_n - U_n) = \frac{U_n + V_n}{2} - \frac{2U_nV_n}{U_n + V_n} - \frac{V_n - U_n}{2} = U_n - \frac{2U_nV_n}{U_n + V_n}$$

$$= \frac{(U_n)^2 + U_nV_n - 2U_nV_n}{U_n + V_n} = \frac{(U_n)^2 - U_nV_n}{U_n + V_n} = \frac{U_n(U_n - V_n)}{U_n + V_n}$$

or $U_n < V_n \Rightarrow U_n - V_n < 0$ alors $V_{n+1} - U_{n+1} - \frac{1}{2}(V_n - U_n) < 0 \Rightarrow V_{n+1} - U_{n+1} < \frac{1}{2}(V_n - U_n)$

b) $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $V_{n+1} - U_{n+1} < \frac{1}{2}(V_n - U_n)$

$$V_1 - U_1 < \frac{1}{2}(V_0 - U_0)$$

$$V_2 - U_2 < \frac{1}{2}(V_1 - U_1)$$

.

.

$$V_n - U_n < \frac{1}{2}(V_{n-1} - U_{n-1})$$

En multipliant les n inégalités membre à membre :

$$V_n - U_n < \left(\frac{1}{2}\right)^n (b - a)$$

$$\textbf{c)}\ \begin{cases} 0 < V_n - U_n < \left(\frac{1}{2}\right)^n (b-a) \\ \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n (b-a) = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} V_n - U_n = 0$$

On a : la suite U est croissante, la suite V est décroissante $U_n < V_n$ et $\lim_{n\to+\infty} V_n - U_n = 0$

alors les suites U et V sont adjacentes et elles ont la même limite L

or $0 < U_n < V_n$ alors $L > 0$

5) a) Pour $n = 0$ on a : $U_0 V_0 = ab$ vrai

Soit $n \in \mathbb{N}$ supposons que $U_n V_n = ab$ montrons que $U_{n+1} \times V_{n+1} = ab$

$$U_{n+1} \times V_{n+1} = \frac{2U_nV_n}{U_n + V_n} \times \frac{U_n + V_n}{2} = U_nV_n = ab$$

Conclusion $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_nV_n = ab$.

b) On a : $U_nV_n = ab$ alors $\lim_{n\to+\infty} U_nV_n = ab$ or $\lim_{n\to+\infty} U_nV_n = L^2$ alors $L^2 = ab$

alors $L = -\sqrt{ab}$ ou $L = \sqrt{ab}$ or $L > 0$ alors $L = \sqrt{ab}$

Exercice 17

1) $U_1 = \frac{U_0}{2+U_0} = \frac{1}{3}$ $\quad U_2 = \frac{U_1}{2+U_1} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{7}{3}} = \frac{1}{7}$

$U_1 - U_0 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ $\quad U_2 - U_1 = \frac{1}{7} - \frac{1}{3} = -\frac{4}{21}$ on a donc $U_1 - U_0 \neq U_2 - U_1$

donc la suite (U_n) n'est pas arithmétique.

$\frac{U_1}{U_0} = \frac{1}{3}$ $\quad \frac{U_2}{U_1} = \frac{\frac{1}{7}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{7}$ on a donc $\frac{U_1}{U_0} \neq \frac{U_2}{U_1}$ donc la suite (U_n) n'est pas géométrique

2) a) Pour $n = 0$ on a : $U_0 = 1 > 0$ vrai

soit $n \in \mathbb{N}$ supposons que $U_n > 0$ montrons que $U_{n+1} > 0$ on a : $U_{n+1} = \frac{\overbrace{U_n}^{+}}{\underbrace{2+\underbrace{U_n}_{+}}_{+}} > 0$

conclusion $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n > 0$.

b) On a $U_{n+1} - U_n = \frac{U_n}{2+U_n} - U_n = \frac{U_n - 2U_n - (U_n)^2}{2+U_n} = \frac{\overbrace{-U_n}^{-}\overbrace{(2+U_n)}^{+}}{\underbrace{2+U_n}_{+}} < 0$

donc la suite (U_n) est décroissante.

c) La suite (U_n) est décroissante et minorée par 0 donc la suite (U_n) est convergente et converge vers un réel L donc $\lim_{n\to+\infty} U_n = L$ avec $L > 0$

soit la fonction $f(x) = \frac{x}{2+x}$ continue sur $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$

on a : $\lim_{n\to+\infty} U_n = L$ avec $L > 0$ donc f est continue en L

on a : $U_{n+1} = f(U_n)$ on a donc $f(L) = L \Leftrightarrow \frac{L}{2+L} = L \Leftrightarrow L = 2L + L^2 \Leftrightarrow L(L+1) = 0$

donc $L = 0$ ou $L = -1$ or $L > 0$ donc $L = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$

3) a) On a : $V_n = \frac{U_n}{1+U_n}$ donc $V_{n+1} = \frac{U_{n+1}}{1+U_{n+1}} = \frac{\frac{U_n}{2+U_n}}{1+\frac{U_n}{2+U_n}} = \frac{\frac{U_n}{2+U_n}}{\frac{2+2U_n}{2+U_n}} = \frac{U_n}{2+2U_n} = \frac{U_n}{2(1+U_n)} = \frac{1}{2}V_n$

donc la suite (V_n) est géométrique de premier terme $V_0 = \frac{U_0}{1+U_0} = \frac{1}{2}$ et de raison $q = \frac{1}{2}$

b) On a : $V_n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^{n+1}}$

on a : $V_n = \frac{U_n}{1+U_n} \Leftrightarrow V_n + V_n \times U_n = U_n \Leftrightarrow U_n(-V_n + 1) = V_n \Leftrightarrow U_n = \frac{V_n}{1-V_n} = \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2^{n+1}}} = \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}} = \frac{1}{2^{n+1}-1}$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\underbrace{2^{n+1}-1}_{+\infty}} = 0$

Exercice 18

1) a) la fonction $x \mapsto 1 + x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R} ; 1 + x^2 > 0$

$x \mapsto \sqrt{\frac{1}{2}(1 + x^2)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R} ;\ f'(x) == \left(\sqrt{\frac{1}{2}(1 + x^2)}\right)' = \frac{x}{2\sqrt{\frac{1}{2}(1+x^2)}}$

b) Pour tout $x \in [0\,,1] \Leftrightarrow\ 0 \le x \le 1\ \Rightarrow\ 0 \le x^2 \le 1\ \Rightarrow\ 1 \le 1 + x^2 \le 2\ \Rightarrow\ \frac{1}{2} \le \frac{1}{2}(1 + x^2) \le 1$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \le \sqrt{\frac{1}{2}(1 + x^2)} \le 1\ \Rightarrow\ 1 \le \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}(1+x^2)}} \le \sqrt{2}\ \Rightarrow\ 0 \le \frac{x}{\sqrt{\frac{1}{2}(1+x^2)}} \le \sqrt{2}\ \Rightarrow\ \frac{x}{\sqrt{\frac{1}{2}(1+x^2)}} \le \sqrt{2}\ \Rightarrow f'(x) \le \frac{1}{\sqrt{2}}$

2) a) Pour $n = 0$ on a : $U_0 = 0$ donc $0 \le U_0 \le 1$ vrai

soit $n \in \mathbb{N}$ supposons que $0 \le U_n \le 1$ montrons que $0 \le U_{n+1} \le 1$

$0 \le U_n \le 1\ \Rightarrow\ 0 \le (U_n)^2 \le 1\ \Rightarrow\ 1 \le 1 + (U_n)^2 \le 2\ \Rightarrow\ \frac{1}{2} \le \frac{1}{2}(1 + (U_n)^2) \le 1$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \le \sqrt{\frac{1}{2}(1 + (U_n)^2)} \le 1\ \Rightarrow\ \frac{1}{\sqrt{2}} \le U_{n+1} \le 1\ \Rightarrow\ 0 \le U_{n+1} \le 1$

conclusion pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \le U_n \le 1$

b) La fonction f est continue sur $[U_n\,,1]$ et dérivable sur $]U_n\,,1[$ et pour tout $x \in [0\,,1]$ on a : $f'(x) \le \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow\ |f'(x)| \le \frac{1}{\sqrt{2}}$ donc $|f(U_n) - f(1)| \le \frac{1}{\sqrt{2}}|U_n - 1|\ \Rightarrow\ |U_{n+1} - 1| \le \frac{1}{\sqrt{2}}|U_n - 1|$

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $|U_{n+1} - 1| \le \frac{1}{\sqrt{2}}|U_n - 1|$ donc

$|U_1 - 1| \le \frac{1}{\sqrt{2}}|U_0 - 1|$

$|U_2 - 1| \le \frac{1}{\sqrt{2}}|U_1 - 1|$

.

.

$|U_n - 1| \le \frac{1}{\sqrt{2}}|U_{n-1} - 1|$

en multipliant les n inégalités membre à membre : $|U_n - 1| \le \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$

d) $\begin{cases} |U_n - 1| \le \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_n - 1 = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 1$

Exercice 19

1) a) Pour $n = 0$ on a : $U_0 = -3 < 1$ vrai

soit $n \in \mathbb{N}$ supposons que $U_n < 1$ montrons que $U_{n+1} < 1$

$U_{n+1} - 1 = \frac{U_n - 8}{2U_n - 9} = \frac{U_n - 8 - 2U_n + 9}{2U_n - 9} = \frac{1 - U_n}{2U_n - 9}$ or $U_n < 1 \Rightarrow -U_n > -1 \Rightarrow 1 - U_n > 0$

d'autre part $2U_n < 2 \Rightarrow 2U_n - 9 < -7 \Rightarrow 2U_n - 9 < 0$ donc $\frac{1 - U_n}{2U_n - 9} < 0$

donc $U_{n+1} - 1 < 0 \Rightarrow U_{n+1} < 1$

conclusion $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n < 1$

b) On a : $U_{n+1} - U_n = \frac{U_n - 8}{2U_n - 9} - U_n = \frac{U_n - 8 - 2(U_n)^2 + 9U_n}{2U_n - 9} = \frac{-2(U_n)^2 + 10U_n - 8}{2U_n - 9} = \frac{-2\overbrace{(U_n - 1)}^{-}\overbrace{(U_n - 4)}^{-}}{\underbrace{2U_n - 9}_{-}} > 0$

donc $U_{n+1} - U_n > 0$ donc la suite (U_n) est croissante.

c) La suite (U_n) est croissante et minorée donc la suite (U_n) est convergente et converge vers un réel L

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = L$ avec $L < 1$

On a : $U_{n+1} = f(U_n)$ avec $f(x) = \frac{x - 8}{2x - 9}$ continue sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{9}{2}\right\}$

on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = L$ avec $L < 1$ donc f est continue en L

donc $f(l) = L \Leftrightarrow \frac{L - 8}{2L - 9} = L \Leftrightarrow L - 8 = 2L^2 - 9L \Leftrightarrow 2L^2 - 10L + 8 = 0$

donc $L = 1$ ou $L = 4$ or $L < 1$ donc $l = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 1$

2) a) $W_n = \frac{U_n - 1}{U_n - 4}$ donc $W_{n+1} = \frac{U_{n+1} - 1}{U_{n+1} - 4} = \frac{\frac{U_n - 8}{2U_n - 9} - 1}{\frac{U_n - 8}{2U_n - 9} - 4} = \frac{-U_n + 1}{-7U_n + 28} = \frac{U_n - 1}{7(U_n - 4)} = \frac{1}{7} W_n$

la suite (W_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{7}$ et de premier terme $W_0 = \frac{U_0 - 1}{U_0 - 4} = \frac{4}{7}$

b) $W_n = \frac{4}{7} \times \left(\frac{1}{7}\right)^n = \frac{4}{7^{n+1}}$ $W_n = \frac{U_n - 1}{U_n - 4} \Leftrightarrow W_n \times U_n - 4W_n = U_n - 1 \Leftrightarrow U_n(W_n - 1) = 4W_n - 1$

$\Leftrightarrow U_n = \frac{4W_n - 1}{W_n - 1} \Leftrightarrow U_n = \frac{\frac{16}{7^{n+1}} - 1}{\frac{4}{7^{n+1}} - 1} = \frac{16 - 7^{n+1}}{4 - 7^{n+1}}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\overbrace{\frac{16}{7^{n+1}}}^{0} - 1}{\underbrace{\frac{4}{7^{n+1}}}_{0} - 1} = 1$

3) a) On a : $\forall n \in \mathbb{N}$ $|U_{n+1} - 1| = \left|\frac{U_n - 8}{2U_n - 9} - 1\right| = \left|\frac{-U_n + 1}{2U_n - 9}\right| = \left|\frac{U_n - 1}{-2U_n + 9}\right| = \frac{|U_n - 1|}{|-2U_n + 9|}$

or $U_n < 1 \Rightarrow -U_n > -1 \Rightarrow -2U_n > -2 \Rightarrow -2U_n + 9 > 7$ donc $|-2U_n + 9| = -2U_n + 9$

donc $|U_{n+1} - 1| = \frac{|U_n - 1|}{-2U_n + 9}$

or $-2U_n + 9 > 7 \Rightarrow \frac{1}{-2U_n + 9} < \frac{1}{7} \Rightarrow \frac{|U_n - 1|}{-2U_n + 9} < \frac{|U_n - 1|}{7} \Rightarrow |U_{n+1} - 1| \le \frac{1}{7}|U_n - 1|$

b) $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $|U_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{7}|U_n - 1|$ donc

$|U_1 - 1| \leq \frac{1}{7}|U_0 - 1|$

$|U_2 - 1| \leq \frac{1}{7}|U_1 - 1|$

.

.

$|U_n - 1| \leq \frac{1}{7}|U_{n-1} - 1|$

en multipliant les n inégalités membre à membre :

$|U_n - 1| \leq \left(\frac{1}{7}\right)^n |U_0 - 1|$ donc $|U_n - 1| \leq 4\left(\frac{1}{7}\right)^n$

c) $\begin{cases} |U_n - 1| \leq 4\left(\frac{1}{7}\right)^n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 4\left(\frac{1}{7}\right)^n = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_n - 1 = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 1$

Exercice 20

1) Pour $n = 0$ on a : $U_0 = 2 \geq 1$ vrai

soit $n \in \mathbb{N}$ supposons que $U_n \geq 1$ montrons que $U_{n+1} \geq 1$

$$U_{n+1} - 1 = \frac{1+(U_n)^2}{2U_n} - 1 = \frac{1-2U_n+(U_n)^2}{2U_n} = \frac{\overbrace{(1-U_n)^2}^{+}}{\underbrace{2U_n}_{+}} \geq 0$$

2) a) $U_{n+1} - U_n = \frac{1+(U_n)^2}{2U_n} - U_n = \frac{1-(U_n)^2}{2U_n}$ or $U_n \geq 1 \Rightarrow (U_n)^2 \geq 1 \Rightarrow -(U_n)^2 \leq -1 \Rightarrow 1 - (U_n)^2 \leq 0$

$\Rightarrow U_{n+1} - U_n \leq 0$ donc la suite (U_n) est décroissante.

b) La suite (U_n) est décroissante et minorée donc la suite (U_n) est convergente et converge vers un réel L donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = L$ avec $L \geq 1$

On a : $U_{n+1} = f(U_n)$ avec $f(x) = \frac{1+x^2}{2x}$ continue sur $\mathbb{R}^*$

on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = L$ avec $L \geq 1$ donc f est continue en L

donc $f(L) = L \Leftrightarrow \frac{1+L^2}{2L} = L \Leftrightarrow 1 + L^2 = 2L^2 \Leftrightarrow L^2 = 1$ donc $L = -1$ ou $L = 1$

or $L \geq 1$ donc $L = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 1$

3) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$U_{n+1} - 1 - \frac{1}{2}(U_n - 1) = \frac{1+(U_n)^2}{2U_n} - 1 - \frac{U_n}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1+(U_n)^2}{2U_n} - \frac{U_n}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1+(U_n)^2}{2U_n} - \frac{(U_n)^2}{2U_n} - \frac{U_n}{2U_n} = \frac{1-U_n}{2U_n}$$

or $U_n \geq 1 \Rightarrow -U_n \leq -1 \Rightarrow 1 - U_n \leq 0 \Rightarrow U_{n+1} - 1 - \frac{1}{2}(U_n - 1) \leq 0$

donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(U_n - 1)$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(U_n - 1)$ donc

$U_1 - 1 \leq \frac{1}{2}(U_0 - 1)$

$U_2 - 1 \leq \frac{1}{2}(U_1 - 1)$

.

$U_n - 1 \leq \frac{1}{2}(U_{n-1} - 1)$

en multipliant les n inégalités membre à membre :

$U_n - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (U_0 - 1) \;\; \Rightarrow \;\; U_n - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

On a : $\begin{cases} 0 \leq U_n - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_n - 1 = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 1$

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$on a : $U_n \geq 1 \Rightarrow U_n - 1 \geq 0$ et on a : $U_n - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ donc $0 \leq U_n - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

donc $1 \leq U_n \leq 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n$ donc

$1 \leq U_1 \leq 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^1$

$1 \leq U_2 \leq 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$

.

.

$1 \leq U_n \leq 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n$

en additionnant les n inégalités membre à membre :

$n \leq U_1 + U_2 + \cdots + U_n \leq n + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$

or $\left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}}\right) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et

$U_1 + U_2 + \cdots + U_n = \sum_{k=1}^{n} U_k = S_n$

donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $n \leq S_n \leq n + 1 - \frac{1}{2^n}$

b) $\begin{cases} n \leq S_n \leq n + 1 - \frac{1}{2^n} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} n + 1 - \frac{1}{2^n} = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $n \leq S_n \leq n + 1 - \frac{1}{2^n} \;\; \Rightarrow \;\; 1 \leq \frac{S_n}{n} \leq 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n2^n}$

$\begin{cases} 1 \leq \frac{S_n}{n} \leq 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n2^n} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n2^n} = 1 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n} = 1$

Exercice 21

1) a) Pour $n=0$ on a : $U_0=\frac{1}{2}$ donc $0<U_0<1$ vrai

soit $n\in\mathbb{N}$ supposons que $0<U_n<1$ montrons que $0<U_{n+1}<1$

$U_{n+1}=\dfrac{\overbrace{2U_n}^{+}}{\underbrace{1+(U_n)^2}_{+}}$ donc $U_{n+1}>0$ (1)

$U_{n+1}-1=\frac{2U_n}{1+(U_n)^2}-1=\frac{2U_n-1-(U_n)^2}{1+(U_n)^2}=\frac{-((U_n)^2-2U_n+1)}{1+(U_n)^2}=\frac{-(U_n-1)^2}{1+(U_n)^2}<0$ donc $U_{n+1}-1<0$ (2)

de (1) et (2) on a : $0<U_{n+1}<1$

conclusion $\forall n\in\mathbb{N}$ on a : $0<U_n<1$.

b) On a $U_{n+1}-U_n=\frac{2U_n}{1+(U_n)^2}=\frac{U_n-(U_n)^2}{1+(U_n)^2}=\frac{U_n(1-(U_n)^2)}{1+(U_n)^2}$

$$=\frac{\overbrace{U_n(1+U_n)}^{+}\overbrace{(1-U_n)}^{-}}{\underbrace{1+(U_n)^2}_{+}}>0$$

Or $0\le U_n\le 1 \Rightarrow -1\le -U_n\le 0 \Rightarrow 0\le 1-U_n\le 1 \Rightarrow 1-U_n>0$ alors $U_{n+1}-U_n>0$

Donc la suite U est croissante et elle est majorée alors elle est convergente

c) On a : $U_{n+1}=f(U_n)$ avec $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$ continue sur $\mathbb{R}$

on a : $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=L$ avec $L\ge 1$ donc f est continue en L

donc $f(L)=L \Leftrightarrow \frac{2L}{1+L^2}=L \Leftrightarrow L+L^3=2L \Leftrightarrow L^3-L=0 \Leftrightarrow L(L^2-1)=0$

donc $L=0$ ou $L=-1$ ou $L=1$ or $L\ge 1$ donc $L=1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=1$

2) a) $V_{n+1}=\frac{1-U_{n+1}}{1+U_{n+1}}=\frac{1-\frac{2U_n}{1+(U_n)^2}}{1+\frac{2U_n}{1+(U_n)^2}}=\frac{\frac{1+(U_n)^2-2U_n}{1+(U_n)^2}}{\frac{1+(U_n)^2+2U_n}{1+(U_n)^2}}=\frac{\frac{1-2U_n+(U_n)^2}{1+(U_n)^2}}{\frac{1+2U_n+(U_n)^2}{1+(U_n)^2}}=\frac{(1-U_n)^2}{(1+U_n)^2}=\left(\frac{1-U_n}{1+U_n}\right)^2=(V_n)^2$

b) Pour $n=0$ on a :

$$V_0=\frac{1-U_0}{1+U_0}=\frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}=\frac{1}{3}=\left(\frac{1}{3}\right)^1=\left(\frac{1}{3}\right)^{2^0}\ \text{vrai}$$

soit $n\in\mathbb{N}$ supposons que $V_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{2^n}$ montrons que $V_{n+1}=\left(\frac{1}{3}\right)^{2^{n+1}}$

$$V_{n+1}=(V_n)^2=\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{2^n}\right)^2=\left(\frac{1}{3}\right)^{2^n\times 2}=\left(\frac{1}{3}\right)^{2^{n+1}}$$

conclusion $\forall n\in\mathbb{N}$; $V_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{2^n}$

c) $P_n=V_0\times V_1\times V_2\times\ldots\times V_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{2^0}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{2^1}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{2^2}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{2^3}\times\ldots\times\left(\frac{1}{3}\right)^{2^n}$

$$=\left(\frac{1}{3}\right)^1\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\left(\frac{1}{3}\right)^4\times\left(\frac{1}{3}\right)^8\times\ldots\times\left(\frac{1}{3}\right)^{2^n}$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right)^{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{4} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{8} \times \dots \times \left(\frac{1}{3}\right)^{2^n} = \left(\frac{1}{3}\right)^{1+2+4+8+\cdots+2^n}$$

On remarque bien que $1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^n$ est la somme des $n + 1$ premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et raison 2 donc

$$1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^n = 1 \times \left(\frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2}\right) = 2^{n+1} - 1 \quad \text{donc} \quad P_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{2^{n+1}-1}$$

d) $V_{n+1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2^{n+1}}$ donc

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{P_n}{V_{n+1}}\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{2^{n+1}-1}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{2^{n+1}}}\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{2^{n+1}-1} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{-2^{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{2^{n+1}-2^{n+1}-1} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = \frac{1}{3^{-1}} = 3$$