Exercice 1

On a $A(1,-2,-1)$, $B(3,-3,-2)$ et $C(0,-3,1)$.

1) a) On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de droite (AB) et $A\in(AB)$ donc une représentation paramétrique de la droite (AB) est $(AB):\begin{cases}x=1+2\alpha\\y=-2-\alpha\\z=-1-\alpha\end{cases}$; $\alpha\in\mathbb{R}$.

b) On a $(AB):\begin{cases}x=1+2\alpha\\y=-2-\alpha\\z=-1-\alpha\end{cases}$; $\alpha\in\mathbb{R}$ donc $(AB):\begin{cases}x+2y+3=0\\y-z+1=0\end{cases}$

2) a) On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$, on a $\begin{vmatrix}2&-1\\-1&-1\end{vmatrix}=-2-1=-3\neq0$ donc les points A, B et C forment un plan P.

b) On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$ sont deux vecteurs directeurs du plan P et $A\in P$ donc une représentation paramétrique de P : $\begin{cases}x=1+2\beta-\gamma\\y=-2-\beta-\gamma\\z=-1-\beta+2\gamma\end{cases}$ $(\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^2$.

c) $M(x,y,z)\in P\Leftrightarrow\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires $\Leftrightarrow det\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=0$

$$\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x-1&2&-1\\y+2&-1&-1\\z+1&-1&2\end{vmatrix}=(x-1)\begin{vmatrix}-1&-1\\-1&2\end{vmatrix}-(y+2)\begin{vmatrix}2&-1\\-1&2\end{vmatrix}+(z+1)\begin{vmatrix}2&-1\\-1&-1\end{vmatrix}=0$$

$\Leftrightarrow -3(x-1)-3(y+2)-3(z+1)=0$ une équation cartésienne de $P: x+y+z+2=0$.

3) Soit $\overrightarrow{N_P}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ un vecteur normal à P, et $P//Q$ donc $\overrightarrow{N_P}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ un vecteur normal à Q donc $Q: x+y+z+d=0$. or $D(1,1,1)\in Q$ donc $d=-3$ donc $Q: x+y+z-3=0$

4) Soit $\overrightarrow{N_{P'}}\begin{pmatrix}-1\\2\\-2\end{pmatrix}$ un vecteur normal à ′ , on a $\begin{vmatrix}1&-1\\1&2\end{vmatrix}=3\neq0$ donc $\overrightarrow{N_P}$ et $\overrightarrow{N_{P'}}$ ne sont pas colinéaires donc les plans P et P′ sont sécants, soit Δ leur droite d'intersection.

$M(x,y,z)\in\Delta=P\cap P'\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+z+2=0\\-x+2y-2z+4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-x=y+z+2\\y+z+2+2y-2z+4=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}-x=y+z+2\\-z+3y+6=0\end{cases}$ on pose $y=t$ donc $\Delta:\begin{cases}x=-6-4t\\y=t\\z=6+3t\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$.

Exercice 2

$A(0,-1,1)$, $B(2,1,3)$ et la droite $\Delta:\begin{cases}x=\alpha\\y=-2+2\alpha\\z=1+\alpha\end{cases}$; $\alpha\in\mathbb{R}$

1) On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (AB) et $A\in(AB)$ donc $(AB):\begin{cases}x=2\beta\\y=-1+2\beta\\z=1+2\beta\end{cases}$ $\beta\in\mathbb{R}$

Soit $M(x,y,z) \in (AB) \cap \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha = 2\beta \\ y = -2 + 2\alpha = -1 + 2\beta \\ z = 1 + \alpha = 1 + 2\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2\beta \\ \beta = \frac{1}{2} \\ 1 + \alpha = 1 + 2\beta \end{cases}$ $\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = \frac{1}{2} \\ 1 + 1 = 1 + 2 \times \frac{1}{2} \end{cases}$

Donc Δ et (AB) sont sécantes en un point $I(1,0,2)$.

2) On a $\Delta' // \Delta$, donc $\overrightarrow{u_\Delta}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ est vecteur directeur de Δ' et $A \in \Delta'$ donc $\Delta' : \begin{cases} x = \gamma \\ y = -1 + 2\gamma \\ z = 1 + \gamma \end{cases} \quad \gamma \in \mathbb{R}$.

3) a) On a $\begin{cases} 1 = \alpha \\ 1 = -2 + 2\alpha \\ 2 = 1 + \alpha \end{cases}$ donc $\begin{cases} \alpha = 1 \\ \alpha = \frac{3}{2} \\ \alpha = 1 \end{cases}$ ce qui est impossible donc C n'appartient pas à la droite Δ.

b) On a $\overrightarrow{u_\Delta}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de Δ et $\Delta_1 // \Delta$ donc $\overrightarrow{u_\Delta}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de Δ_1 et

$C \in \Delta_1$ donc $\Delta_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

4) a) Le plan P contient les droites Δ' et Δ donc $\overrightarrow{u_\Delta}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur de P, déterminons un point D

appartenant à Δ on a pour $\alpha = 0$; $D(0,-2,1)$ et comme $A(0,-1,1) \in \Delta'$ donc $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$ est vecteur de

P, on remarque bien $\overrightarrow{u_\Delta}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires $\left(\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0\right)$donc une représentation

paramétrique du plan P est $\begin{cases} x = t \\ y = -2 + 2t - s \\ z = 1 + t \end{cases} \quad (t,s) \in \mathbb{R}^2$.

b) $M(x,y,z) \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AD}, et\ \overrightarrow{u_\Delta}$ sont coplanaires $\Leftrightarrow det\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{u_\Delta}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow$

$\begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ y+1 & -1 & 2 \\ z-1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - (y+1)\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + (z-1)\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow -x + (z-1) = 0$ donc $P : x - z + 1 = 0$

Exercice 3

$A(-1,0,2)$, $(3,2,-4)$, $C(1,-4,2)$ et $D(3,2,0)$.

1) On a $I = A * B$ donc $x_I = \frac{-1+3}{2} = 1 \quad y_I = \frac{0+2}{2} = 1 \quad z_I = \frac{2-4}{2} = -1$ donc $I(1,1,-1)$

$K = C * D$ donc $x_K = \frac{1+3}{2} = 2 \quad y_K = \frac{-4+2}{2} = -1 \quad z_K = \frac{2+0}{2} =$ donc $K(2,-1,1)$

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-2\\-6\\6\end{pmatrix}$ donc $\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{3}{2}\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$ soit $J(x,y,z)$ donc $\overrightarrow{BJ}\begin{pmatrix}x-3\\y-2\\z+4\end{pmatrix}$ on a $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ donc $\begin{cases} x - 3 = -\frac{1}{2} \\ y - 2 = -\frac{3}{2} \\ z + 4 = \frac{3}{2} \end{cases}$

donc $\begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ y = \frac{1}{2} \\ z = -\frac{5}{2} \end{cases}$ donc $J\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right)$

2) a) On a $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}\\-\frac{3}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$ on a $\begin{vmatrix}\frac{3}{2} & 1\\-\frac{1}{2} & -2\end{vmatrix}=-3+\frac{1}{2}=-\frac{5}{2}\neq 0$ donc $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ ne sont pas colinéaires donc $I\,,J\;et\;K$ ne sont pas alignés.

b) Soit $M(x\,,y\,,z)\in(IJK)$ donc $det\left(\overrightarrow{IM},\overrightarrow{IJ}\,,\overrightarrow{IK}\right)=0\;\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x-1 & \frac{3}{2} & 1\\y-1 & -\frac{1}{2} & -2\\z+1 & -\frac{3}{2} & 2\end{vmatrix}=0\;\Leftrightarrow$

$(x-1)\begin{vmatrix}-\frac{1}{2} & -2\\-\frac{3}{2} & 2\end{vmatrix}-(y-1)\begin{vmatrix}\frac{3}{2} & 1\\-\frac{3}{2} & 2\end{vmatrix}+(z+1)\begin{vmatrix}\frac{3}{2} & 1\\-\frac{1}{2} & -2\end{vmatrix}=0$

$\Leftrightarrow\;(x-1)(-1-3)-(y-1)\left(3+\frac{3}{2}\right)+(z+1)\left(-3+\frac{1}{2}\right)=0$

$\Leftrightarrow\;-4x+4-\frac{9}{2}y+\frac{9}{2}-\frac{5}{2}z-\frac{5}{2}=0\qquad\Leftrightarrow\;-8x+8-9y+9-5z-5=0$

$\Leftrightarrow -8x-9y-5z+12=0.$ donc $(IJK)\colon 8x+9y+5z-12=0.$

c) On a $I(1\,,1\,,-1)\in(IJK)$ et $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}\\-\frac{3}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$ sont deux vecteurs du plan (IJK)

donc $(IJK)\colon\begin{cases}x=1+\frac{3}{2}\alpha+\beta\\y=1-\frac{1}{2}\alpha-2\beta\\z=-1-\frac{3}{2}\alpha+2\beta\end{cases}\qquad(\alpha\,,\beta)\in\mathbb{R}^2$

3) a) $A(-1\,,0\,,2)\in(AD)$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}4\\2\\-2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (AD)

donc $(AD)\colon\begin{cases}x=-1+4\gamma\\y=2\gamma\\z=2-2\gamma\end{cases}\qquad\gamma\in\mathbb{R}$

b) On a $(AD)\colon\begin{cases}x=-1+4\gamma\\y=2\gamma\\z=2-2\gamma\end{cases}\quad\gamma\in\mathbb{R}$ donc $(AD)\colon\begin{cases}x-2y=-1\\y+z=2\end{cases}$ donc $(AD)\colon\begin{cases}x-2y+1=0\\y+z-2=0\end{cases}$

4) a) On a $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}4\\2\\-2\end{pmatrix}$ et $(IJK)\colon 8x+9y+5z-12=0$

on a $8\times 4+9\times 2+5\times(-2)=32+18-10=40\neq 0$ donc $\overrightarrow{AD}$ n'est pas un vecteur du plan (IJK) donc la droite (AD) et le plan (IJK) sont sécants en un point L.

b) $M(x\,,y\,,z)\in(AD)\cap(IJK)\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1+4\gamma\\y=2\gamma\\z=2-2\gamma\\8x+9y+5z-12=0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + 4\gamma \\ y = 2\gamma \\ z = 2 - 2\gamma \\ -8 + 32\gamma + 18\gamma + 10 - 10\gamma - 12 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + 4\gamma \\ y = 2\gamma \\ z = 2 - 2\gamma \\ 40\gamma = 10 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{2} \\ \gamma = \frac{1}{4} \end{cases} \text{ donc } L\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$$

on a $\overrightarrow{AL}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{7}{4} \end{pmatrix}$ $A(-1,0,2)$ $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ donc $\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{7}{4} \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.

Exercice 4

$A(0,1,-5), B(-1,-2,-1), C(1,0,-5)$.

1) a) on a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ on a $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 3 = 4 \neq 0$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires donc les points A, B *et* C déterminent un plan P.

b) $M(x,y,z) \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires $\Leftrightarrow det\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ y-1 & -3 & -1 \\ z+5 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} - (y-1)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} + (z+5)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow 4x + 4y - 4 + 4z + 20 = 0 \Leftrightarrow 4x + 4y + 4z + 16 = 0$

donc $P: x + y + z + 4 = 0$.

c) $A \in P$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs de P donc $P: \begin{cases} x = -\gamma + \beta \\ y = 1 - 3\gamma - \beta \\ z = -5 + 4\gamma \end{cases} (\gamma, \beta) \in \mathbb{R}^2$

2) $D: \begin{cases} x = 1 - \alpha \\ y = 2 + 3\alpha \\ z = -4 + \alpha \end{cases} ; \alpha \in IR$

a) On $\vec{u}_D\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur de D et $P: x + y + z + 4 = 0$

on a $-1 + 3 + 1 = 3 \neq 0$ donc $\vec{u}_D$ n'est pas un vecteur de P donc le plan P et la droite D sont sécants.

b) $M(x,y,z) \in D \cap P \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - \alpha \\ y = 2 + 3\alpha \\ z = -4 + \alpha \\ x + y + z + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - \alpha \\ y = 2 + 3\alpha \\ z = -4 + \alpha \\ 1 - \alpha + 2 + 3\alpha + -4 + \alpha + 4 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - \alpha \\ y = 2 + 3\alpha \\ z = -4 + \alpha \\ 3\alpha = -3 \end{cases}$ donc $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = -5 \\ \alpha = -1 \end{cases}$ donc $I(2,-1,-5)$

3) a) On a $Q: 2x - y + 3z - 1 = 0$ et $P: x + y + z + 4 = 0$ on a $\frac{2}{1} \neq \frac{-1}{1}$

donc les plans P *et* Q sont sécants.

b) $M(x,y,z) \in \Delta = P \cap Q \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z + 4 = 0 \\ 2x - y + 3z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y - z - 4 \\ -2y - 2z - 8 - y + 3z - 1 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -y - z - 4 \\ -3y + z - 9 = 0 \end{cases}$ on pose $z = t$; $t \in \mathbb{R}$ donc $\Delta: \begin{cases} x = -1 - \frac{4}{3}t \\ y = -3 + \frac{1}{3}t \\ z = t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$

c) On a $\vec{u}_D\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}$ soit $\vec{u}_\Delta\begin{pmatrix}-\frac{4}{3}\\\frac{1}{3}\\1\end{pmatrix}$ un vecteur directeur de Δ, on a $\begin{vmatrix}-1 & -\frac{4}{3}\\3 & \frac{1}{3}\end{vmatrix}=-\frac{1}{3}+4=\frac{11}{3}\neq 0$

donc $\vec{u}_D$ et $\vec{u}_\Delta$ ne sont pas colinéaires donc les droites D et Δ ne sont pas parallèles.

soit $M(x,y,z)\in\Delta\cap D \Leftrightarrow \begin{cases}x=1-\alpha=-1-\frac{4}{3}t\\y=2+3\alpha=-3+\frac{1}{3}t\\z=-4+\alpha=t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1-\alpha=-1-\frac{4}{3}t\\2+3\alpha=-3+\frac{1}{3}t\\-4+\alpha=t\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=2+\frac{4}{3}t\\2+6+4t=-3+\frac{1}{3}t\\-4+\alpha=t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=-2-\frac{4}{3}t\\4t-\frac{1}{3}t=-11\\-4+\alpha=t\end{cases}$ donc $\begin{cases}\alpha=2\\t=-3\\-4+2=-3\end{cases}$ impossible

donc D et Δ ne sont pas sécants

D et Δ ne sont parallèles et ne sont pas sécants donc D et Δ ne sont pas coplanaires.

Exercice 5

$D:\begin{cases}x=2+\alpha\\y=1+2\alpha\\z=1-\alpha\end{cases}\ \alpha\in\mathbb{R}$ et $D':\begin{cases}x=4+3\beta\\y=3+\beta\\z=3+2\beta\end{cases}\ \beta\in\mathbb{R}$

1) Soit soient $\vec{u}_D\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ un vecteur directeur de D et $\vec{u}_{D'}\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$ un vecteur directeur de D'

on a $\begin{vmatrix}1 & 2\\2 & 1\end{vmatrix}=1-4=-3\neq 0$ donc $\vec{u}_D$ et $\vec{u}_{D'}$ ne sont pas colinéaires donc les droites D et D' ne sont pas parallèles. **(1)**

Soit $M(x,y,z)\in D\cap D' \Leftrightarrow \begin{cases}x=2+\alpha=4+3\beta\\y=1+2\alpha=3+\beta\\z=1-\alpha=3+2\beta\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2+\alpha=4+3\beta\\1+2\alpha=3+\beta\\1-\alpha=3+2\beta\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=2+3\beta\\1+4+6\beta=3+\beta\\1-\alpha=3+2\beta\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=2+3\beta\\\beta=-\frac{2}{5}\\1-\alpha=3+2\beta\end{cases}$ donc $\begin{cases}\alpha=\frac{4}{5}\\\beta=-\frac{2}{5}\\1-\frac{4}{5}=3-\frac{4}{5}\end{cases}$ impossible

donc les droites D et D' ne sont pas sécantes **(2)**

de **(1)** et **(2)** les droites D et D' ne sont pas coplanaires.

2) a) On a $\begin{cases}4=2+\alpha\\-7=1+2\alpha\\5=1-\alpha\end{cases}$ donc $\begin{cases}\alpha=2\\\alpha=-4\\\alpha=-4\end{cases}$ impossible donc $A(4,-7,5)$ n'appartient pas à la droite D.

b) Déterminons un point de $E\in D$ on a pour $\alpha=0$; $E(2,1,1)$

Le plan P passe par le point A et contenant la droite D et $E\in D$; donc $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}-2\\8\\-4\end{pmatrix}$ et $\vec{u}_D\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ sont deux vecteurs du plan P, $M(x,y,z)\in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\vec{u}_D$ sont coplanaires $\Leftrightarrow det(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AE},\vec{u}_D)=0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix}x-4 & -2 & 1\\y+7 & 8 & 2\\z-5 & -4 & -1\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow (x-4)\begin{vmatrix}8 & 2\\-4 & -1\end{vmatrix}-(y+7)\begin{vmatrix}-2 & 1\\-4 & -1\end{vmatrix}+(z-5)\begin{vmatrix}-2 & 1\\8 & 2\end{vmatrix}=0$

$\Leftrightarrow\ (x-4)\times 0-(y+7)\times 6+(z-5)\times(-12)=0 \Leftrightarrow -6y-42-12z+60=0$

$\Leftrightarrow -6y-12z+18=0\ \Leftrightarrow -y-2z+3=0$ donc une éqution de P est : $y+2z-3=0$

3) a) Pour que le vecteur $\vec{u}_m=\vec{\imath}+\vec{\jmath}+m\vec{k}$ soit un vecteur du plan P il faut que $1+m=0$ donc $m=-1$

b) On a $\vec{u}_\Delta\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de Δ, on a $1+2\times 1=3\neq 0$ donc $\vec{u}_\Delta$ n'est pas un vecteur de P

donc la droite $\Delta= D(A\,,\vec{\imath}+\vec{\jmath}+\vec{k})$ est sécante à P.

4) Soit $M(x\,,y\,,z)\in D'\cap P \Leftrightarrow \begin{cases}x=4+3\beta\\ y=3+\beta\\ z=3+2\beta\\ y+2z-3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=4+3\beta\\ y=3+\beta\\ z=3+2\beta\\ 3+\beta+6+4\beta-3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=4+3\beta\\ y=3+\beta\\ z=3+2\beta\\ \beta=-\frac{6}{5}\end{cases}$

donc $\begin{cases}x=\frac{2}{5}\\ y=\frac{9}{5}\\ z=-\frac{3}{5}\\ \beta=-\frac{6}{5}\end{cases}$ donc $D'\cap P$ est le point $I\left(\frac{2}{5}\,,\frac{9}{5}\,,\,-\frac{3}{5}\right)$

5) a) $P_1 : x-4y+7=0$ et $P_2 : x-2z+5=0$ on a $\frac{1}{1}\neq\frac{-4}{-2}$ donc P_1 et P_2 sont sécants.

b) Soit $M(x\,,y\,,z)\in D_1=P_1\cap P_2 \Leftrightarrow \begin{cases}x-4y+7=0\\ x-2z+5=0\end{cases}$ on pose $y=t\,;\quad t\in\mathbb{R}$

donc $D_1 : \begin{cases}x=-7+4t\\ y=t\\ z=-1+2t\end{cases}$

Exercice 6

$A(1\,,-2\,,-1)\,,\,B(3\,,-3\,,-2)$ et $C(0\,,-3\,,1)$

1) a) On a $A\in(AB)$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (AB) donc

$(AB) : \begin{cases}x=1+2\alpha\\ y=-2-\alpha\quad \alpha\in\mathbb{R}.\\ z=-1-\alpha\end{cases}$

b) On a $(AB) : \begin{cases}x=1+2\alpha\\ y=-2-\alpha\quad \alpha\in\mathbb{R}.\\ z=-1-\alpha\end{cases}$ donc $(AB) : \begin{cases}x+2y+3=0\\ y-z+1=0\end{cases}$

2) a) On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$ on a $\begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & -1\end{vmatrix}=-2-1=-3\neq 0$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires donc les points A, B et C forment un plan P.

b) On a $A\in P$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$ sont deux vecteurs du plan P donc

$P : \begin{cases}x=1+2\beta-\gamma\\ y=-2-\beta-\gamma\quad (\beta\,,\gamma)\in\mathbb{R}^2\\ z=-1-\beta+2\gamma\end{cases}$

c) $M(x\,,y\,,z) \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\,,\ \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires $\Leftrightarrow det\left(\overrightarrow{AM}\,,\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AC}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 2 & -1 \\ y+2 & -1 & -1 \\ z+1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x-1)\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - (y+2)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + (z+1)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow (x-1)\times(-3) - (y+2)\times 3 + (z+1)\times(-3) = 0$ donc $P :\ x+y+z+2 = 0.$

3) On a le plan Q est parallèle à P donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur de Q et $D(1\,,1\,,1) \in Q$ donc $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur de Q, $M(x\,,y\,,z) \in Q \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 2 & 0 \\ y+2 & -1 & 3 \\ z+1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{donc} \quad Q :\ x+y+z-3 = 0.$$

4) On a $P :\ x+y+z+2 = 0$ et $P' :\ -x+2y-2z+4 = 0$ on a $\frac{1}{-1} \neq \frac{1}{2}$ donc P et P' sont sécants.

Soit $M(x\,,y\,,z) \in P \cap P' \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z+2 = 0 \\ -x+2y-2z+4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x = 2+y+z \\ 2+y+z+2y-2z+4 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2-y-z \\ 3y-z+6 = 0 \end{cases}$ on pose $z = t\,;t \in \mathbb{R}$ donc $(P \cap P') : \begin{cases} x = -4-\frac{4}{3}t \\ y = 2+\frac{1}{3}t \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

Exercice 7

$D_1 : \begin{cases} x = -1+\alpha \\ y = -\alpha \\ z = 1+\alpha \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}$ et $D_2 : \begin{cases} x = -\beta \\ y = 1+\beta \\ z = 2-\beta \end{cases} \quad \beta \in \mathbb{R}$

1) $\vec{u}_{D_1}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D_1 et $\vec{u}_{D_2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D_2

On a $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$ donc les vecteurs D_1 et $\vec{u}_{D_2}$ sont colinéaires donc les droites D_1 et D_2 sont parallèles.

2) Pour $\alpha = 0$ on a $E(-1\,,0\,,1) \in D_1$ et pour $\beta = 0$ on a $F(0\,,1\,,2) \in D_2$

Le plan P contenant à la fois les droites D_1 et D_2 , donc $\vec{u}_{D_1}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sot deux vecteurs de P et

$E(-1\,,0\,,1) \in P$, $M(x\,,y\,,z) \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{EM}, \vec{u}_{D_1}$et $\overrightarrow{EF}$ sont coplanaires $\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AM}, \vec{u}_{D_1}, \overrightarrow{EF}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+1 & 1 & 1 \\ y & -1 & 1 \\ z-1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{donc} \quad P :\ x-z+2 = 0$$

3) Pour que le vecteur $\vec{u}_m = \vec{\imath}+\vec{\jmath}+m\vec{k}$ soit un vecteur de P il faut que $1-m = 0$ donc $m = 1$.

4) **a)** $\Delta = D\left(A\,,\vec{\imath}+\vec{\jmath}+\vec{k}\right)$ donc $\vec{u}_\Delta\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de Δ on a $1-1 = 0$ donc $\vec{u}_\Delta\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur de P donc $\Delta // P$.

b) $\Delta = D\left(A\,,\vec{\imath}+\vec{\jmath}-\vec{k}\right)$ donc $\vec{u}_\Delta\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de Δ on a $1+1 = 2 \neq 0$ donc $\vec{u}_\Delta\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ n'est pas un vecteur de P donc Δ est sécante à P.

c) $\Delta = D(O, \vec{i}+\vec{j}-\vec{k})$ donc $\vec{u}_\Delta\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de Δ on a $1+1=2\neq 0$ donc $\vec{u}_\Delta\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ n'est pas un vecteur de P donc Δ est sécante à P.

5) On a $P_1 : x+z=0$ et $P_2 : x-z+1=0$

a) On a $\frac{1}{1}\neq\frac{1}{-1}$ donc P_1 et P_2 sont sécants.

b) Soit $M(x,y,z)\in D = P_1\cap P_2 \Leftrightarrow \begin{cases}x+z=0\\x-z+1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-z\\-z-z+1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-z\\z=\frac{1}{2}\end{cases}$

on pose $y=t$; $t\in\mathbb{R}$ donc $D : \begin{cases}x=-\frac{1}{2}\\y=t\\z=\frac{1}{2}\end{cases}$

c) $P : x-z+2=0.$ $P_2 : x-z+1=0$ on a $\frac{1}{1}=\frac{-1}{-1}$ donc $P//P_2$

Exercice 8

$A(1,2,2)$, $B(3,2,1)$ et $C(1,3,3)$.

1) a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ on a $\begin{vmatrix}2&0\\0&1\end{vmatrix}=2\neq 0$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires donc les points A, B et C déterminent un plan P.

b) $M(x,y,z)\in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires $\Leftrightarrow det(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix}x-1&2&0\\y-2&0&1\\z-2&-1&1\end{vmatrix}=0$ donc $P : x-2y+2z-1=0$

2) a) $P_1 : x-2y+2z-1=0$ et $P_2 : x-3y+2z+2=0$ on a $\frac{1}{1}\neq\frac{-2}{-3}$ donc les plans P_1 et P_2 sont sécants suivant une droite D.

b) On a $1\times1-2\times3+2\times3-1=0$ donc $C\in P_1$

on a $1\times1-3\times3+2\times3+2=0$ donc $C\in P_2$

on donc $C\in P_1\cap P_2$ donc le point C appartient à la droite D.

c) On a $1\times2-2\times0+2\times(-1)=0$ donc le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur de P_1.

On a $1\times2-3\times0+2\times(-1)=0$ donc le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur de P_2

donc le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite D.

d) Le point $C(1,3,3)$ appartient à la droite D et $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite D

donc $D : \begin{cases}x=1+2\alpha\\y=3\\z=3-\alpha\end{cases}$ $\alpha\in\mathbb{R}$.