

Exercice 1

On a $A(1, -2, -1)$, $B(3, -3, -2)$ et $C(0, -3, 1)$.

1) a) On a $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de droite (AB) et $A \in (AB)$ donc une représentation

paramétrique de la droite (AB) est $(AB): \begin{cases} x = 1 + 2\alpha \\ y = -2 - \alpha \\ z = -1 - \alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}.$

b) On a $(AB): \begin{cases} x = 1 + 2\alpha \\ y = -2 - \alpha \\ z = -1 - \alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}$ donc $(AB): \begin{cases} x + 2y + 3 = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases}$

2) a) On a $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, on a $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3 \neq 0$ donc les points A, B et C forment un plan P .

b) On a $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs directeurs du plan P et $A \in P$ donc une représentation paramétrique de P : $\begin{cases} x = 1 + 2\beta - \gamma \\ y = -2 - \beta - \gamma \\ z = -1 - \beta + 2\gamma \end{cases} (\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2.$

c) $M(x, y, z) \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}$ et \overrightarrow{AC} sont coplanaires $\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 2 & -1 \\ y+2 & -1 & -1 \\ z+1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (x-1) \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - (y+2) \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + (z+1) \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow -3(x-1) - 3(y+2) - 3(z+1) = 0 \text{ une équation cartésienne de } P : x + y + z + 2 = 0.$$

3) Soit $\overrightarrow{N_P} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ un vecteur normal à P , et $P // Q$ donc $\overrightarrow{N_P} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ un vecteur normal à Q donc

$$Q : x + y + z + d = 0. \text{ or } D(1, 1, 1) \in Q \text{ donc } d = -3 \text{ donc } Q : x + y + z - 3 = 0$$

4) Soit $\overrightarrow{N_{P'}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ un vecteur normal à P' , on a $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ donc $\overrightarrow{N_P}$ et $\overrightarrow{N_{P'}}$ ne sont pas colinéaires donc

les plans P et P' sont sécants, soit Δ leur droite d'intersection.

$$M(x, y, z) \in \Delta = P \cap P' \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z + 2 = 0 \\ -x + 2y - 2z + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x = y + z + 2 \\ y + z + 2 + 2y - 2z + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x = y + z + 2 \\ -z + 3y + 6 = 0 \end{cases} \text{ on pose } y = t \text{ donc } \Delta: \begin{cases} x = -6 - 4t \\ y = t \\ z = 6 + 3t \end{cases} t \in \mathbb{R}.$$

Exercice 2

$A(0, -1, 1)$, $B(2, 1, 3)$ et la droite $\Delta: \begin{cases} x = \alpha \\ y = -2 + 2\alpha \\ z = 1 + \alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}$

1) On a $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (AB) et $A \in (AB)$ donc $(AB): \begin{cases} x = 2\beta \\ y = -1 + 2\beta \\ z = 1 + 2\beta \end{cases} \beta \in \mathbb{R}$

$$\text{Soit } M(x, y, z) \in (AB) \cap \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha = 2\beta \\ y = -2 + 2\alpha = -1 + 2\beta \\ z = 1 + \alpha = 1 + 2\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2\beta \\ \beta = \frac{1}{2} \\ 1 + \alpha = 1 + 2\beta \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = \frac{1}{2} \\ 1 + 1 = 1 + 2 \times \frac{1}{2} \end{cases}$$

Donc Δ et (AB) sont sécantes en un point $I(1, 0, 2)$.

2) On a $\Delta' // \Delta$, donc $\vec{u}_{\Delta} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur directeur de Δ' et $A \in \Delta'$ donc $\Delta': \begin{cases} x = \gamma \\ y = -1 + 2\gamma \\ z = 1 + \gamma \end{cases} \quad \gamma \in \mathbb{R}$.

3) a) On a $\begin{cases} 1 = \alpha \\ 1 = -2 + 2\alpha \\ 2 = 1 + \alpha \end{cases}$ donc $\begin{cases} \alpha = 1 \\ \alpha = \frac{3}{2} \\ \alpha = 1 \end{cases}$ ce qui est impossible donc C n'appartient pas à la droite Δ .

b) On a $\vec{u}_{\Delta} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de Δ et $\Delta_1 // \Delta$ donc $\vec{u}_{\Delta} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de Δ_1 et

$C \in \Delta_1$ donc $\Delta_1: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

4) a) Le plan P contient les droites Δ' et Δ donc $\vec{u}_{\Delta} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur de P , déterminons un point D

appartenant à Δ on a pour $\alpha = 0$; $D(0, -2, 1)$ et comme $A(0, -1, 1) \in \Delta'$ donc $\vec{AD} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est vecteur de

P , on remarque bien \vec{u}_{Δ} et \vec{AD} ne sont pas colinéaires ($\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$) donc une représentation

paramétrique du plan P est $\begin{cases} x = t \\ y = -2 + 2t - s \\ z = 1 + t \end{cases} \quad (t, s) \in \mathbb{R}^2$.

b) $M(x, y, z) \in P \Leftrightarrow \vec{AM}, \vec{AD}, \text{ et } \vec{u}_{\Delta}$ sont coplanaires $\Leftrightarrow \det(\vec{AM}, \vec{AD}, \vec{u}_{\Delta}) = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ y+1 & -1 & 2 \\ z-1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - (y+1) \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + (z-1) \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow -x + (z-1) = 0 \text{ donc } P: x - z + 1 = 0$$

Exercice 3

$A(-1, 0, 2)$, $(3, 2, -4)$, $C(1, -4, 2)$ et $D(3, 2, 0)$.

1) On a $I = A * B$ donc $x_I = \frac{-1+3}{2} = 1 \quad y_I = \frac{0+2}{2} = 1 \quad z_I = \frac{2-4}{2} = -1$ donc $I(1, 1, -1)$

$K = C * D$ donc $x_K = \frac{1+3}{2} = 2 \quad y_K = \frac{-4+2}{2} = -1 \quad z_K = \frac{2+0}{2} = 1$ donc $K(2, -1, 1)$

$\vec{BC} \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$ donc $\frac{1}{4}\vec{BC} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ soit $J(x, y, z)$ donc $\vec{BJ} \begin{pmatrix} x-3 \\ y-2 \\ z+4 \end{pmatrix}$ on a $\vec{BJ} = \frac{1}{4}\vec{BC}$ donc $\begin{cases} x-3 = -\frac{1}{2} \\ y-2 = -\frac{3}{2} \\ z+4 = \frac{3}{2} \end{cases}$

donc $\begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ y = \frac{1}{2} \\ z = -\frac{5}{2} \end{cases}$ donc $J\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right)$ *Kooli Mohamed Hechmi*

2) a) On a $\vec{IJ} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$ et $\vec{IK} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ on a $\begin{vmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -2 \end{vmatrix} = -3 + \frac{1}{2} = -\frac{5}{2} \neq 0$ donc \vec{IJ} et \vec{IK} ne sont pas

colinéaires donc I, J et K ne sont pas alignés.

b) Soit $M(x, y, z) \in (IJK)$ donc $\det(\vec{IM}, \vec{IJ}, \vec{IK}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & \frac{3}{2} & 1 \\ y-1 & -\frac{1}{2} & -2 \\ z+1 & -\frac{3}{2} & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

$$(x-1) \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & -2 \\ \frac{3}{2} & 2 \end{vmatrix} - (y-1) \begin{vmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{3}{2} & 2 \end{vmatrix} + (z+1) \begin{vmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(-1-3) - (y-1)\left(3 + \frac{3}{2}\right) + (z+1)\left(-3 + \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow -4x + 4 - \frac{9}{2}y + \frac{9}{2} - \frac{5}{2}z - \frac{5}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow -8x + 8 - 9y + 9 - 5z - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow -8x - 9y - 5z + 12 = 0. \text{ donc } (IJK): 8x + 9y + 5z - 12 = 0.$$

c) On a $I(1, 1, -1) \in (IJK)$ et $\vec{IJ} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$ et $\vec{IK} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs du plan (IJK)

$$\text{donc } (IJK): \begin{cases} x = 1 + \frac{3}{2}\alpha + \beta \\ y = 1 - \frac{1}{2}\alpha - 2\beta \\ z = -1 - \frac{3}{2}\alpha + 2\beta \end{cases} \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

3) a) $A(-1, 0, 2) \in (AD)$ et $\vec{AD} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (AD)

$$\text{donc } (AD): \begin{cases} x = -1 + 4\gamma \\ y = 2\gamma \\ z = 2 - 2\gamma \end{cases} \quad \gamma \in \mathbb{R}$$

b) On a $(AD): \begin{cases} x = -1 + 4\gamma \\ y = 2\gamma \\ z = 2 - 2\gamma \end{cases} \quad \gamma \in \mathbb{R}$ donc $(AD): \begin{cases} x - 2y = -1 \\ y + z = 2 \end{cases}$ donc $(AD): \begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases}$

4) a) On a $\vec{AD} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $(IJK): 8x + 9y + 5z - 12 = 0$

on a $8 \times 4 + 9 \times 2 + 5 \times (-2) = 32 + 18 - 10 = 40 \neq 0$ donc \vec{AD} n'est pas un vecteur du plan (IJK)

donc la droite (AD) et le plan (IJK) sont sécants en un point L .

$$\text{b) } M(x, y, z) \in (AD) \cap (IJK) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + 4\gamma \\ y = 2\gamma \\ z = 2 - 2\gamma \\ 8x + 9y + 5z - 12 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + 4\gamma \\ y = 2\gamma \\ z = 2 - 2\gamma \\ -8 + 32\gamma + 18\gamma + 10 - 10\gamma - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + 4\gamma \\ y = 2\gamma \\ z = 2 - 2\gamma \\ 40\gamma = 10 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{2} \\ \gamma = \frac{1}{4} \end{cases} \text{ donc } L\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$$

on a $\overrightarrow{AL} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{7}{4} \end{pmatrix}$ $A(-1, 0, 2)$ $\overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ donc $\frac{1}{4}\overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{7}{4} \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.

Exercice 4

$A(0, 1, -5), B(-1, -2, -1), C(1, 0, -5)$.

1) a) on a $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ on a $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 3 = 4 \neq 0$ donc \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} ne sont pas

colinéaires donc les points A, B et C déterminent un plan P .

b) $M(x, y, z) \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}$ et \overrightarrow{AC} sont coplanaires $\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ y-1 & -3 & -1 \\ z+5 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} - (y-1) \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} + (z+5) \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x + 4y - 4 + 4z + 20 = 0 \Leftrightarrow 4x + 4y + 4z + 16 = 0$$

donc $P : x + y + z + 4 = 0$.

c) $A \in P$ et $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs de P donc $P : \begin{cases} x = -\gamma + \beta \\ y = 1 - 3\gamma - \beta \\ z = -5 + 4\gamma \end{cases} (\gamma, \beta) \in \mathbb{R}^2$

2) $D : \begin{cases} x = 1 - \alpha \\ y = 2 + 3\alpha \\ z = -4 + \alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}$

a) On $\vec{u}_D \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur de D et $P : x + y + z + 4 = 0$

on a $-1 + 3 + 1 = 3 \neq 0$ donc \vec{u}_D n'est pas un vecteur de P donc le plan P et la droite D sont sécants.

b) $M(x, y, z) \in D \cap P \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - \alpha \\ y = 2 + 3\alpha \\ z = -4 + \alpha \\ x + y + z + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - \alpha \\ y = 2 + 3\alpha \\ z = -4 + \alpha \\ 1 - \alpha + 2 + 3\alpha + -4 + \alpha + 4 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - \alpha \\ y = 2 + 3\alpha \\ z = -4 + \alpha \\ 3\alpha = -3 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = -5 \\ \alpha = -1 \end{cases} \text{ donc } I(2, -1, -5)$$

3) a) On a $Q : 2x - y + 3z - 1 = 0$ et $P : x + y + z + 4 = 0$ on a $\frac{2}{1} \neq \frac{-1}{1}$

donc les plans P et Q sont sécants.

b) $M(x, y, z) \in \Delta = P \cap Q \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z + 4 = 0 \\ 2x - y + 3z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y - z - 4 \\ -2y - 2z - 8 - y + 3z - 1 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -y - z - 4 \\ -3y + z - 9 = 0 \end{cases} \text{ on pose } z = t ; t \in \mathbb{R} \text{ donc } \Delta : \begin{cases} x = -1 - \frac{4}{3}t \\ y = -3 + \frac{1}{3}t \\ z = t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

c) On a $\vec{u}_D \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ soit $\vec{u}_\Delta \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ un vecteur directeur de Δ , on a $\begin{vmatrix} -1 & -\frac{4}{3} \\ 3 & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = -\frac{1}{3} + 4 = \frac{11}{3} \neq 0$

donc \vec{u}_D et \vec{u}_Δ ne sont pas colinéaires donc les droites D et Δ ne sont pas parallèles.

$$\text{soit } M(x, y, z) \in \Delta \cap D \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - \alpha = -1 - \frac{4}{3}t \\ y = 2 + 3\alpha = -3 + \frac{1}{3}t \\ z = -4 + \alpha = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \alpha = -1 - \frac{4}{3}t \\ 2 + 3\alpha = -3 + \frac{1}{3}t \\ -4 + \alpha = t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 + \frac{4}{3}t \\ 2 + 6 + 4t = -3 + \frac{1}{3}t \\ -4 + \alpha = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -2 - \frac{4}{3}t \\ 4t - \frac{1}{3}t = -11 \\ -4 + \alpha = t \end{cases} \quad \text{donc } \begin{cases} \alpha = 2 \\ t = -3 \\ -4 + 2 = -3 \end{cases} \text{ impossible}$$

donc D et Δ ne sont pas sécants

D et Δ ne sont pas parallèles et ne sont pas sécants donc D et Δ ne sont pas coplanaires.

Exercice 5

$$D : \begin{cases} x = 2 + \alpha \\ y = 1 + 2\alpha \\ z = 1 - \alpha \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad D' : \begin{cases} x = 4 + 3\beta \\ y = 3 + \beta \\ z = 3 + 2\beta \end{cases} \quad \beta \in \mathbb{R}$$

1) Soient $\vec{u}_D \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ un vecteur directeur de D et $\vec{u}_{D'} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ un vecteur directeur de D'

on a $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3 \neq 0$ donc \vec{u}_D et $\vec{u}_{D'}$ ne sont pas colinéaires donc les droites D et D' ne sont pas parallèles. (1)

$$\text{Soit } M(x, y, z) \in D \cap D' \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + \alpha = 4 + 3\beta \\ y = 1 + 2\alpha = 3 + \beta \\ z = 1 - \alpha = 3 + 2\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + \alpha = 4 + 3\beta \\ 1 + 2\alpha = 3 + \beta \\ 1 - \alpha = 3 + 2\beta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 + 3\beta \\ 1 + 4 + 6\beta = 3 + \beta \\ 1 - \alpha = 3 + 2\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 + 3\beta \\ \beta = -\frac{2}{5} \\ 1 - \alpha = 3 + 2\beta \end{cases} \quad \text{donc } \begin{cases} \alpha = \frac{4}{5} \\ \beta = -\frac{2}{5} \\ 1 - \frac{4}{5} = 3 - \frac{4}{5} \end{cases} \text{ impossible}$$

donc les droites D et D' ne sont pas sécantes (2)

de (1) et (2) les droites D et D' ne sont pas coplanaires.

2) a) On a $\begin{cases} 4 = 2 + \alpha \\ -7 = 1 + 2\alpha \\ 5 = 1 - \alpha \end{cases}$ donc $\begin{cases} \alpha = 2 \\ \alpha = -4 \\ \alpha = -4 \end{cases}$ impossible donc $A(4, -7, 5)$ n'appartient pas à la droite D .

b) Déterminons un point de $E \in D$ on a pour $\alpha = 0$; $E(2, 1, 1)$

Le plan P passe par le point A et contenant la droite D et $E \in D$; donc $\overrightarrow{AE} \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_D \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont deux

vecteurs du plan P , $M(x, y, z) \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AE}$ et \vec{u}_D sont coplanaires $\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AE}, \vec{u}_D) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-4 & -2 & 1 \\ y+7 & 8 & 2 \\ z-5 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x-4) \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} - (y+7) \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} + (z-5) \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-4) \times 0 - (y+7) \times 6 + (z-5) \times (-12) = 0 \Leftrightarrow -6y - 42 - 12z + 60 = 0$$

$$\Leftrightarrow -6y - 12z + 18 = 0 \Leftrightarrow -y - 2z + 3 = 0 \text{ donc une équation de } P \text{ est : } y + 2z - 3 = 0$$

3) a) Pour que le vecteur $\vec{u}_m = \vec{i} + \vec{j} + m\vec{k}$ soit un vecteur du plan P il faut que $1 + m = 0$ donc $m = -1$

b) On a $\vec{u}_\Delta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de Δ , on a $1 + 2 \times 1 = 3 \neq 0$ donc \vec{u}_Δ n'est pas un vecteur de P

donc la droite $\Delta = D(A, \vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$ est sécante à P .

$$4) \text{ Soit } M(x, y, z) \in D' \cap P \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 + 3\beta \\ y = 3 + \beta \\ z = 3 + 2\beta \\ y + 2z - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 + 3\beta \\ y = 3 + \beta \\ z = 3 + 2\beta \\ 3 + \beta + 6 + 4\beta - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 + 3\beta \\ y = 3 + \beta \\ z = 3 + 2\beta \\ \beta = -\frac{6}{5} \end{cases}$$

$$\text{donc } \begin{cases} x = \frac{2}{5} \\ y = \frac{9}{5} \\ z = -\frac{3}{5} \\ \beta = -\frac{6}{5} \end{cases} \text{ donc } D' \cap P \text{ est le point } I \left(\frac{2}{5}, \frac{9}{5}, -\frac{3}{5} \right)$$

5) a) $P_1 : x - 4y + 7 = 0$ et $P_2 : x - 2z + 5 = 0$ on a $\frac{1}{1} \neq \frac{-4}{-2}$ donc P_1 et P_2 sont sécants.

b) Soit $M(x, y, z) \in D_1 = P_1 \cap P_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 4y + 7 = 0 \\ x - 2z + 5 = 0 \end{cases}$ on pose $y = t ; t \in \mathbb{R}$

$$\text{donc } D_1 : \begin{cases} x = -7 + 4t \\ y = t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$$

Exercice 6

$A(1, -2, -1), B(3, -3, -2)$ et $C(0, -3, 1)$

1) a) On a $A \in (AB)$ et $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (AB) donc

$$(AB) : \begin{cases} x = 1 + 2\alpha \\ y = -2 - \alpha \\ z = -1 - \alpha \end{cases} \alpha \in \mathbb{R}.$$

b) On a $(AB) : \begin{cases} x = 1 + 2\alpha \\ y = -2 - \alpha \\ z = -1 - \alpha \end{cases} \alpha \in \mathbb{R}.$ donc $(AB) : \begin{cases} x + 2y + 3 = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases}$

2) a) On a $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ on a $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3 \neq 0$ donc \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} ne sont pas

colinéaires donc les points A, B et C forment un plan P .

b) On a $A \in P$ et $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs du plan P donc

$$P : \begin{cases} x = 1 + 2\beta - \gamma \\ y = -2 - \beta - \gamma \\ z = -1 - \beta + 2\gamma \end{cases} (\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2$$

c) $M(x, y, z) \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}$ et \overrightarrow{AC} sont coplanaires $\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 2 & -1 \\ y+2 & -1 & -1 \\ z+1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x-1) \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - (y+2) \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + (z+1) \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1) \times (-3) - (y+2) \times 3 + (z+1) \times (-3) = 0 \text{ donc } P : x + y + z + 2 = 0.$$

3) On a le plan Q est parallèle à P donc $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur de Q et $D(1, 1, 1) \in Q$ donc $\overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ est

un vecteur de Q , $M(x, y, z) \in Q \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}$ et \overrightarrow{AD} sont colinéaires $\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 2 & 0 \\ y+2 & -1 & 3 \\ z+1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \text{ donc } Q : x + y + z - 3 = 0.$$

4) On a $P : x + y + z + 2 = 0$ et $P' : -x + 2y - 2z + 4 = 0$ on a $\frac{1}{-1} \neq \frac{1}{2}$ donc P et P' sont sécants.

$$\text{Soit } M(x, y, z) \in P \cap P' \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z + 2 = 0 \\ -x + 2y - 2z + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x = 2 + y + z \\ 2 + y + z + 2y - 2z + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 - y - z \\ 3y - z + 6 = 0 \end{cases} \text{ on pose } z = t; t \in \mathbb{R} \text{ donc } (P \cap P') : \begin{cases} x = -4 - \frac{4}{3}t \\ y = 2 + \frac{1}{3}t \\ z = t \end{cases} t \in \mathbb{R}$$

Exercice 7

$$D_1 : \begin{cases} x = -1 + \alpha \\ y = -\alpha \\ z = 1 + \alpha \end{cases} \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } D_2 : \begin{cases} x = -\beta \\ y = 1 + \beta \\ z = 2 - \beta \end{cases} \beta \in \mathbb{R}$$

1) $\vec{u}_{D_1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D_1 et $\vec{u}_{D_2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D_2

On a $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$ $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$ donc les vecteurs D_1 et \vec{u}_{D_2} sont colinéaires donc les droites D_1 et D_2 sont parallèles.

2) Pour $\alpha = 0$ on a $E(-1, 0, 1) \in D_1$ et pour $\beta = 0$ on a $F(0, 1, 2) \in D_2$

Le plan P contenant à la fois les droites D_1 et D_2 , donc $\vec{u}_{D_1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EF} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs de P et

$E(-1, 0, 1) \in P$, $M(x, y, z) \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{EM}, \vec{u}_{D_1}$ et \overrightarrow{EF} sont coplanaires $\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{EM}, \vec{u}_{D_1}, \overrightarrow{EF}) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+1 & 1 & 1 \\ y & -1 & 1 \\ z-1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ donc } P : x - z + 2 = 0$$

3) Pour que le vecteur $\vec{u}_m = \vec{i} + \vec{j} + m\vec{k}$ soit un vecteur de P il faut que $1 - m = 0$ donc $m = 1$.

4) a) $\Delta = D(A, \vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$ donc $\vec{u}_\Delta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de Δ on a $1 - 1 = 0$ donc $\vec{u}_\Delta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un

vecteur de P donc $\Delta // P$.

b) $\Delta = D(A, \vec{i} + \vec{j} - \vec{k})$ donc $\vec{u}_\Delta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de Δ on a $1 + 1 = 2 \neq 0$ donc $\vec{u}_\Delta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

n'est pas un vecteur de P donc Δ est sécante à P .

c) $\Delta = D(O, \vec{i} + \vec{j} - \vec{k})$ donc $\vec{u}_\Delta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de Δ on a $1 + 1 = 2 \neq 0$ donc $\vec{u}_\Delta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

n'est pas un vecteur de P donc Δ est sécante à P .

5) On a $P_1 : x + z = 0$ et $P_2 : x - z + 1 = 0$

a) On a $\frac{1}{1} \neq \frac{1}{-1}$ donc P_1 et P_2 sont sécants.

b) Soit $M(x, y, z) \in D = P_1 \cap P_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ x - z + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ -z - z + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$

on pose $y = t$; $t \in \mathbb{R}$ donc $D : \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = t \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$

c) $P : x - z + 2 = 0$. $P_2 : x - z + 1 = 0$ on a $\frac{1}{1} = \frac{-1}{-1}$ donc $P // P_2$

Exercice 8

$A(1, 2, 2)$, $B(3, 2, 1)$ et $C(1, 3, 3)$.

1) a) $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ on a $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ donc \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} ne sont pas colinéaires donc les points

A, B et C déterminent un plan P .

b) $M(x, y, z) \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}$ et \overrightarrow{AC} sont coplanaires $\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 2 & 0 \\ y-2 & 0 & 1 \\ z-2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ donc $P : x - 2y + 2z - 1 = 0$

2) a) $P_1 : x - 2y + 2z - 1 = 0$ et $P_2 : x - 3y + 2z + 2 = 0$ on a $\frac{1}{1} \neq \frac{-2}{-3}$ donc les plans P_1 et P_2 sont sécants suivant une droite D .

b) On a $1 \times 1 - 2 \times 3 + 2 \times 3 - 1 = 0$ donc $C \in P_1$

on a $1 \times 1 - 3 \times 3 + 2 \times 3 + 2 = 0$ donc $C \in P_2$

on donc $C \in P_1 \cap P_2$ donc le point C appartient à la droite D .

c) On a $1 \times 2 - 2 \times 0 + 2 \times (-1) = 0$ donc le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur de P_1 .

On a $1 \times 2 - 3 \times 0 + 2 \times (-1) = 0$ donc le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur de P_2

donc le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite D .

d) Le point $C(1, 3, 3)$ appartient à la droite D et $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite D

donc $D : \begin{cases} x = 1 + 2\alpha \\ y = 3 \\ z = 3 - \alpha \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$