Correction du devoir de contrôle n 1

Exercice n 1 (3 points)

Pour chacune des questions suivantes , une seule réponse est correcte.La relever .

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(8x^2+4)\sin(\frac{1}{2x^2+1})$ est égal à : **c** 4

2) La forme algébrique de $\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2025}$ est : **c** -1

3) Si $f(x)=x^3-3x+1$ et $g(x)=\frac{x+2}{2-x}$ alors $\lim\limits_{x\to 2^+} f\circ g(x)=$ **a** $-\infty$

Exercice n 2 (6.5 points)

1) a) On a : $OA=|z_A|=|1+i\sqrt{3}|=2$ donc $A\in\mathscr{C}_{(O,2)}$, de même pour B , $OB=|z_B|=|-\sqrt{3}+i|=2$ donc $B\in\mathscr{C}_{(O,2)}$

b) $A\in\mathscr{C}_{(O,2)}\bigcap\Delta : x=1$ avec $y_A>0$ et $B\in\mathscr{C}_{(O,2)}\bigcap\Delta : y=1$ avec $x_B<0$

2) a) $z_A=1+i\sqrt{3}=[2,\frac{\pi}{3}]=2e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_B=-\sqrt{3}+i=[2,\frac{5\pi}{6}]=2e^{i\frac{5\pi}{6}}$

$$\frac{z_A}{z_B}=\frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{i\frac{5\pi}{6}}}=e^{i(\frac{\pi}{3}-\frac{5\pi}{6})}=e^{-i\frac{\pi}{2}}=-i$$

b) $\frac{Z_{\overrightarrow{OA}}}{Z_{\overrightarrow{OB}}}=\frac{z_A}{z_B}=-i\in i\mathbb{R}$ donc $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$ et $|\frac{Z_{\overrightarrow{OA}}}{Z_{\overrightarrow{OB}}}|=|-i|=1$ par suite $OA=OB$, d'où OAB est un triangle rectangle et isocèle en O .

3) a) $z_C=1-\sqrt{3}+i\sqrt{3}+i=(1+i\sqrt{3})+(-\sqrt{3}+i)=z_A+z_B$

On a $z_C=z_A+z_B\Leftrightarrow Z_{\overrightarrow{OC}}=Z_{\overrightarrow{OA}}+Z_{\overrightarrow{OB}}$ d'où $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$. Par suite $OACB$ est un parallélogramme . Comme OAB est rectangle et isocèle en O alors $OACB$ est un carré .

b) On a : $z_C=|z_C|e^{iarg(z_C)}$

1ere méthode(**Méthode géométrique**)

$|z_C|=OC=\sqrt{OA^2+OB^2}=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$ et $arg(z_C)=(\widehat{\vec{u}\,;\overrightarrow{OC}})=(\widehat{\vec{u}\,;\overrightarrow{OA}})+(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC}})=$

$\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{12}$ d'où $\boxed{z_C=2\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}}$

2ème méthode(**Méthode algébrique**)

$z_C=z_A+z_B=2e^{i\frac{\pi}{3}}+2e^{i\frac{5\pi}{6}}=2e^{i(\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi}{6})}(e^{i(\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{6})}+e^{-i(\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{6})})=2(2cos(\frac{\pi}{4})e^{i(\frac{7\pi}{12})}=2\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$

, $\boxed{e^{i\alpha}+e^{i\beta}=e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}}+e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}})=2cos(\frac{\alpha-\beta}{2})e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}}$

$z_C=(1-\sqrt{3})+i(\sqrt{3}+1)=2\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}=2\sqrt{2}(cos(\frac{7\pi}{12})+isin(\frac{7\pi}{12}))$, d'ou $2\sqrt{2}cos(\frac{7\pi}{12})=(1-\sqrt{3})$ et $2\sqrt{2}sin(\frac{7\pi}{12})=(1+\sqrt{3})$ par suite : $cos(\frac{7\pi}{12})=\frac{(1-\sqrt{3})}{2\sqrt{2}}$ et $sin(\frac{7\pi}{12})=\frac{(1+\sqrt{3})}{2\sqrt{2}}$

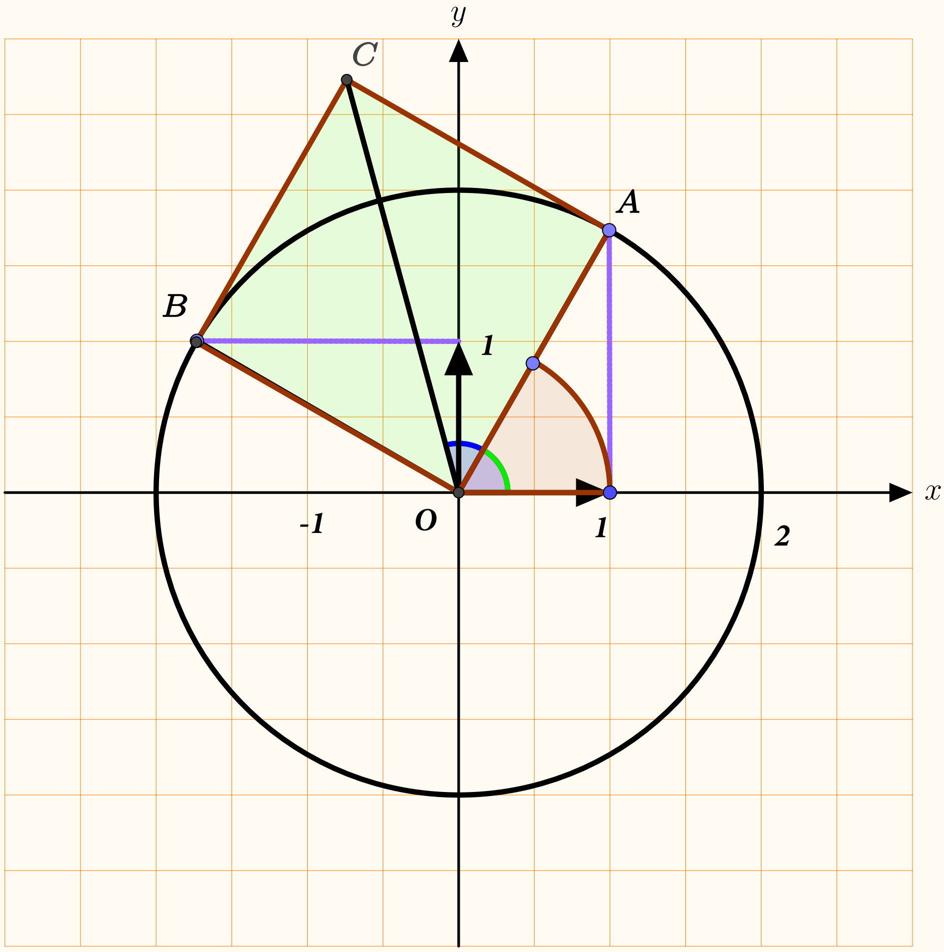
4) a) $M\in\mathscr{C}_{(O,2)}\Leftrightarrow OM=2\Leftrightarrow|z_M|=2$, on a : $|z_{M'}|=|i\frac{z_M}{z_A}|\Leftrightarrow OM'=\frac{OM}{OA}=\frac{2}{2}=1$ d'ou $\boxed{M'\in\mathscr{C}'_{(O,1)}}$

b) **i)** $-2isin(\frac{\theta}{2})e^{i(\frac{\theta}{2})} = -(e^{i(\frac{\theta}{2})} - e^{-i(\frac{\theta}{2})})e^{i(\frac{\theta}{2})} = -(e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\theta}{2})} - e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{\theta}{2})}) = 1 - e^{i(\theta)}$.

$$z' = i\frac{z}{z_A} = i\frac{-2isin(\frac{\theta}{2})e^{i(\frac{\theta}{2})}}{2e^{i\frac{\pi}{3}}} = \boxed{sin(\frac{\theta}{2})e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{3})}}$$

ii) O ,A et M sont alignés $\Leftrightarrow \frac{Z_{\overrightarrow{OM}}}{Z_{\overrightarrow{OA}}} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{z}{z_A} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z' = i\frac{z}{z_A} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow sin(\frac{\theta}{2})e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{3})} \in i\mathbb{R}$

$\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \frac{\theta}{2} = \frac{5\pi}{6} + k\pi \Leftrightarrow \theta = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ et $\theta \in]-\pi, \pi]$ d'ou $\boxed{\theta = -\frac{\pi}{3}}$



Exercice n 3 (6.5 points)

1) **a)** Pour tout réel $x \geq 0$, $-1 \leq cos(x) \leq 1 \Rightarrow -\sqrt{x} \leq \sqrt{x}cos(x) \leq \sqrt{x}$

$\Leftrightarrow 1 - \sqrt{x} \leq 1 + \sqrt{x}cos(x) \leq 1 + \sqrt{x}$. Comme $x + 1 > 0$, $\forall x \geq 0$ alors on a : $\frac{1-\sqrt{x}}{x+1} \leq f(x) \leq \frac{1+\sqrt{x}}{x+1}$

b) On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1-\sqrt{x}}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1-x}{(x+1)(1+\sqrt{x})} = \lim\limits_{x\to+\infty} (\frac{1-x}{x+1})\frac{1}{(1+\sqrt{x})} = (-1) \times 0 = \boxed{0}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1+\sqrt{x}}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1-x}{(x+1)(1-\sqrt{x})} = \lim\limits_{x\to+\infty} (\frac{1-x}{x+1})\frac{1}{(1-\sqrt{x})} = (-1) \times 0 = \boxed{0}$

et $\frac{1-\sqrt{x}}{x+1} \leq f(x) \leq \frac{1+\sqrt{x}}{x+1}$ alors $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$.

La droite $\Delta : y = 0$ est une asymptote horizontale à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$

2) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2(\sqrt{x^2+1}+1)}{2x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}+1}{2} = \boxed{+\infty}$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}+1}{2x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x(-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{x})}{2x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{(-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{x})}{2} = \boxed{-\frac{1}{2} = a}$

$\lim_{x\to-\infty} 2f(x)+x = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+1}+1+x = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}+1 = \boxed{1 = 2b}$

La droite $\Delta' : y = ax+b = -\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ est une asymptote oblique à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de $-\infty$

3) La fonction $x \mapsto \frac{1+\sqrt{x}cos(x)}{x+1}$ est continue sur $[0,+\infty[$

La fonction $x \mapsto \frac{x^2}{2(\sqrt{x^2+1}-1)}$ est continue sur $]-\infty,0[$, $f(0) = \frac{1+\sqrt{0}cos(0)}{0+1} = 1$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{x^2+1}+1}{2} = 1 = f(0)$, d'où f est continue en 0 , par suite f est continue sur $\mathbb{R}$.

4) $\lim_{x\to 0^+} f(\frac{1}{\sqrt{x}}) = \lim_{x\to 0^+} f(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}}}_{+\infty}) = 0$, $\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^+} f(\frac{1}{cos(x)}) = \lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^+} f(\underbrace{\frac{1}{cos(x)}}_{-\infty}) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(\underbrace{f(x)}_{+\infty}) = 0$

5) **a)** f est continue sur $[\frac{\pi}{2},\pi] \subset [0,+\infty[$, $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+1} > 0$ et $f(\pi) = \frac{1-\sqrt{\pi}}{\pi+1} < 0$, d'où il existe au moins une solution $\alpha \in]\frac{\pi}{2},\pi[$ de l'équation $f(x) = 0$

b) On a $f(\alpha) = 0 \Rightarrow 1+\sqrt{\alpha}cos(\alpha) = 0 \Leftrightarrow cos(\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ d'où $cos^2(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$ donc $\alpha = \frac{1}{cos^2(\alpha)} = 1+tan^2(\alpha) \Leftrightarrow tan^2(\alpha) = \alpha-1$ d'où $\boxed{tan(\alpha) = -\sqrt{\alpha-1}}$, car $\forall\alpha \in]\frac{\pi}{2},\pi[, tan(\alpha) < 0$

Exercice n 4 (4 points)

1) **a)** $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \boxed{1 = a}$ = **coefficient directeur de la droite** $\Delta : y = x-1$

$\lim_{x\to+\infty} (f(x)-x) = \boxed{-1 = b}$ = **l'ordonnée à l'origine de la droite** Δ

, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \boxed{-\infty}$ et $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \boxed{+\infty.}$

b) $\lim_{x\to 0^+} x\cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{t} = \boxed{1}$, avec $t = \frac{1}{x}$ lorsque :$x \to 0^+$, $t \to +\infty$

$\lim_{x\to 0^+} \left(f\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}\right) = \lim_{t\to+\infty} (f(t)-t) = \boxed{-1}$, avec $t = \frac{1}{x}$ lorsque :$x \to 0^+$, $t \to +\infty$

$\lim_{x\to(-1)^+} \frac{3}{f(x)-1} = \frac{3}{1^+-1} = \frac{3}{0^+} = \boxed{+\infty}$, $\lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)-3}{f(x)} = \frac{0-3}{0^-} = \frac{-3}{0^-} = \boxed{+\infty.}$

c) $\lim_{x\to-\infty} \frac{4}{2f(x)+2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{f(x)+1} = \frac{2}{(-1)^++1} = \frac{2}{0^+} = \boxed{+\infty}$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{-5}{3f(x)-3x+3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-5}{3(f(x)-(x-1))} = \frac{-5}{3\times(0^-)} = \boxed{+\infty}$,car $\mathscr{C}_f$ au dessous de Δ

2) $f(]-\infty,-1]) = \boxed{]-1,1]}$,car f est strictement croissante sur $]-\infty,-1]$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1, f(-1) = 1$

$f\circ f([-1,0[) = f([1,+\infty[) = \boxed{[-\frac{3}{2},+\infty[}$, $f(]0,2]) = \boxed{]-\infty,0].}$