Correction : Devoir de contrôle n 1

Exercice n 1 (3 points)

1) $\lim_{x\to-\infty}(9x^3+6)^2\cos(\frac{1}{3x^3+2})-(9x^3+6)^2$ est égal à : **c** $-\frac{9}{2}$

2) La forme algébrique de $\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2025}$ est : **b** 1

3) Si $f(x)=-4x^3-3x+7$ et $g(x)=\frac{x+7}{3-x}$ alors $\lim_{x\to3^+} f\circ g(x)=$ **a** $+\infty$

Exercice n 2 (7 points)

1) $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$,$\Delta=b^2-4ac=(2\sqrt{3})^2-16=-4=(2i)^2$, $\delta=2i$ est une racine carrée de Δ donc $z_1=\frac{-b+\delta}{2a}=\frac{2\sqrt{3}+2i}{2}=\sqrt{3}+i$ et $z_2=\frac{-b-\delta}{2a}=\frac{2\sqrt{3}-2i}{2}=\sqrt{3}-i$

2) $z_A=\sqrt{3}+i,\ z_{A'}=\sqrt{3}-\text{i}$ et $z_B=-1+i\sqrt{3}$.

a) $z_A=\sqrt{3}+i=2e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $z_B=-1+i\sqrt{3}+i=2e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Voir le graphique

b) $\frac{Z_{\overrightarrow{OA}}}{Z_{\overrightarrow{OA'}}}=\frac{2e^{i\frac{\pi}{6}}}{2e^{-i\frac{\pi}{6}}}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ donc $OA=OA'$ et $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OA'}})=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ donc OAA' est un triangle équilatéral.

de même $\frac{Z_{\overrightarrow{OB}}}{Z_{\overrightarrow{OA}}}=\frac{2e^{i\frac{2\pi}{3}}}{2e^{i\frac{\pi}{6}}}=e^{i\frac{\pi}{2}}\Rightarrow OA=OB$ et $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ donc OAB est un triangle rectangle et isocèle en O.

3) **a)** OADB soit un carré voir le graphique . $z_D=|z_D|e^{iarg(z_D)}$, $|z_D|=OD=\sqrt{2\times OA^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

et $arg(z_D)=(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{OD}})=(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{OA}})+(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OD}})=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}+2k\pi=\frac{5\pi}{12}+2k\pi$, $z_D=2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$

b) OADB est un carré donc $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}$ donc $Z_{\overrightarrow{OD}}=Z_{\overrightarrow{OA}}+Z_{\overrightarrow{OB}}$ par suite $z_D=z_A+z_B$, $z_D=z_A+z_B=\sqrt{3}+i+i\sqrt{3}-1=(\sqrt{3}-1)+i(\sqrt{3}+1)$

c) $cos(\frac{5\pi}{12})=\frac{Re(z_D)}{|z_D|}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

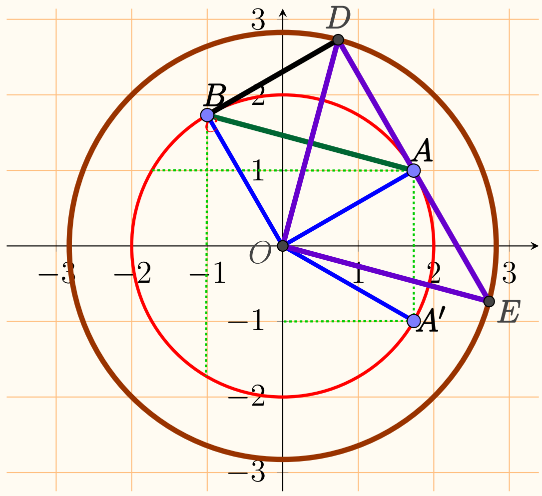
4) **a)** $z_E=2z_A-z_D=z_A-z_B=(\sqrt{3}+1)+i(1-\sqrt{3})$.

$OE=|z_E|=\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2+(1-\sqrt{3})^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ d'ou E est un point de $(\mathcal{C})$

b) $\frac{Z_{\overrightarrow{OD}}}{Z_{\overrightarrow{OE}}}=\frac{(\sqrt{3}-1)+i(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}+1)+i(1-\sqrt{3})}=i\Rightarrow OD=OE$ et $(\widehat{\overrightarrow{OE},\overrightarrow{OD}})=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ donc ODE est un triangle rectangle et isocèle en O.

$A=D*E$ et ODE est un triangle rectangle et isocèle en O donc $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OE}})=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$

On a :$(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{OE}})=(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{OA}})+(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OE}})+2k\pi=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}+2k\pi=-\frac{\pi}{12}+2k\pi$, donc $z_E=2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{12}}$



Exercice n 3 (5 points)

1) $f(x)+2=0 \Leftrightarrow f(x)=-2$

- f est continue sur $]-\infty,-2]$ et $f(]-\infty,-2])=]0,1]$ or $-2 \notin]0,1]$donc l'équation $f(x)=-2$ n'a pas de solutions dans $]-\infty,-2]$.
- f est continue sur $[-2,1[$ et $f([-2,1[)=]-\infty,1]$, $-2 \in]-\infty,1]$ et f est strictement décroissante sur $[-2,1[$, donc l'équation $f(x)=-2$ admet dans $[-2,1[$ une solution unique α.
- f est continue sur $]1,+\infty[$ et $f(]1,+\infty[)=]-\infty,0[$, $-2 \in]-\infty,0[$ et f est strictement croissante sur $]1,+\infty[$, donc l'équation $f(x)=-2$ admet dans $]1,+\infty[$ une solution unique β

Conclusion : l'équation $f(x)=-2$ admet deux solutions α et β avec $-2<\alpha<1$ et $1<\beta$.

2) **a)** f est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, $f(]-\infty,-2])=]0,1]$, $0 \notin]0,1]$, $f(]1,+\infty[)=]-\infty,0[$, $0 \notin]-\infty,0[$ donc l'équation $f(x)=0$ n'a pas de solutions dans $]-\infty,-2]$ et $]1,+\infty[$.

- f est continue et strictement décroissante sur $[-2,1[$ et $f([-2,1[)=]-\infty,1]$, $0 \in]-\infty,1]$ donc l'équation $f(x)=0$ admet dans $[-2,1[$ une solution unique x_0

Conclusion : L'équation $f(x)=0$ admet dans $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ une solution unique x_0 avec $-2<x_0<1$

b) .

x	$-\infty$		x_0		1		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	

3) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=1$: $y=1$ est une asymptote horizontale à (Γ) au voisinage de $-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$: $y=0$ est une asymptote horizontale à (Γ) au voisinage de $+\infty$

$\lim_{x\to 1} f(x)=-\infty$: $x=1$ est une asymptote verticale à (Γ)

4) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f(x)-1}=\dfrac{1}{0-1}=-1$, $\quad \lim_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{0^-}=-\infty$, $\quad \lim_{x\to-\infty}\dfrac{x+4}{xf(x)}=\lim_{x\to-\infty}\underbrace{\dfrac{x+4}{x}}_{1}\times\underbrace{\dfrac{1}{f(x)}}_{1}=1$

$\lim_{x\to+\infty} f(\underbrace{f(\underbrace{\frac{x^3+1}{x^3+1}}_{1})}_{-\infty})=1.$ $\quad \lim_{x\to-\infty} f(\underbrace{f(x)}_{1})=-\infty.$

5) $f]-\infty,1[=]-\infty,2]$, et $f(]1,+\infty[)=]-\infty,0[$

Exercice 4 (5 points)

1) Par une lecture graphique, déterminer :

a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty\Big)$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 1$, et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x=0)$.

b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}\right)}_{0} = 0$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)\sin\left(\frac{1}{f(x)}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{f(x)}\right)}{\frac{1}{f(x)}} = \lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t} = 1$,

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x-f(x)} = +\infty$.

c) .

x	$-\infty$		-1		0.5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-0.5	$\nearrow$	$+\infty$

2) Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{1}{\sqrt{f(x)}}$.

a) $D_g =]-2,0[\cup]1,+\infty[$

b) $g(]-2,0[) = [1,+\infty[$.