Correction : Devoir de contrôle n 1

Exercice n 1 (3 points)

Pour chacune des questions suivantes , une seule réponse est correcte.La relever .

1) c

2) b

3) a

Exercice n 2 (7 points)

1) **a)** $z_A = 1 + i\sqrt{3} = [2, \frac{\pi}{3}] = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_B = -\sqrt{3} + i = [2, \frac{5\pi}{6}] = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$

b) On a : $OA = |z_A| = 2$ donc $A \in \mathscr{C}_{(O,2)}$, de même pour B , $OB = |z_B| = 2$ donc $B \in \mathscr{C}_{(O,2)}$
$A \in \mathscr{C}_{(O,2)} \bigcap \Delta : x = 1$ avec $y_A > 0$ et $B \in \mathscr{C}_{(O,2)} \bigcap \Delta : y = 1$ avec $x_B < 0$

c) $\frac{Z_{\overrightarrow{OA}}}{Z_{\overrightarrow{OB}}} = \frac{z_A}{z_B} == \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{i\frac{5\pi}{6}}} = e^{i(\frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{6})} = e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i \in i\mathbb{R}$ donc $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$ et $|\frac{Z_{\overrightarrow{OA}}}{Z_{\overrightarrow{OB}}}| = |-i| = 1$ par suite $OA = OB$, d'où OAB est un triangle rectangle et isocèle en O .

2) **a)** $z_C = 1 - \sqrt{3} + i\sqrt{3} + i = (1 + i\sqrt{3}) + (-\sqrt{3} + i) = z_A + z_B$

On a $z_C = z_A + z_B \Leftrightarrow Z_{\overrightarrow{OC}} = Z_{\overrightarrow{OA}} + Z_{\overrightarrow{OB}}$ d'où $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$. Par suite $OACB$ est un parallélogramme . Comme OAB est rectangle et isocèle en O alors $OACB$ est un carré .

b) On a : $z_C = |z_C|e^{iarg(z_C)}$

1ere méthode(Méthode géométrique)

$|z_C| = OC = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$ et $arg(z_C) = (\widehat{\vec{u}\,;\overrightarrow{OC}}) = (\widehat{\vec{u}\,;\overrightarrow{OA}}) + (\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC}}) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{12}$ d'où $\boxed{z_C = 2\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}}$

2ème méthode(Méthode algébrique)

$z_C = z_A + z_B = 2e^{i\frac{\pi}{3}} + 2e^{i\frac{5\pi}{6}} = 2e^{i(\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{6})}(e^{i(\frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{6})} + e^{-i(\frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{6})}) = 2(2cos(\frac{\pi}{4})e^{i(\frac{7\pi}{12})} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$

, $\boxed{e^{i\alpha} + e^{i\beta} = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} + e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}}) = 2cos(\frac{\alpha-\beta}{2})e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}}$

c) $z_C = (1 - \sqrt{3}) + i(\sqrt{3} + 1) = 2\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}} = 2\sqrt{2}(cos(\frac{7\pi}{12}) + isin(\frac{7\pi}{12}))$, d'ou $2\sqrt{2}cos(\frac{7\pi}{12}) = (1 - \sqrt{3})$ et $2\sqrt{2}sin(\frac{7\pi}{12}) = (1 + \sqrt{3})$ par suite : $cos(\frac{7\pi}{12}) = \frac{(1-\sqrt{3})}{2\sqrt{2}}$ et $sin(\frac{7\pi}{12}) = \frac{(1+\sqrt{3})}{2\sqrt{2}}$

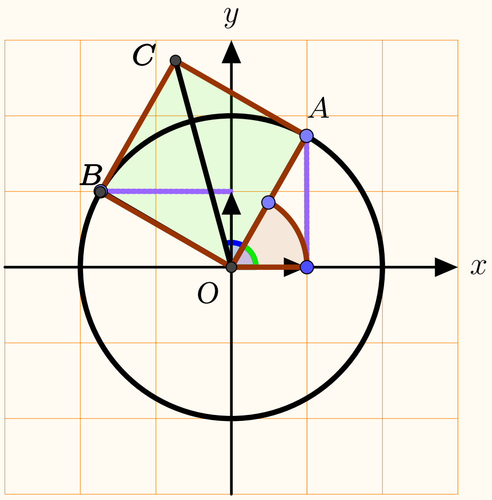
3) **a)** $M \in \mathscr{C}_{(O,2)} \Leftrightarrow OM = 2 \Leftrightarrow |z_M| = 2$, on a : $|z_{M'}| = |i\frac{z_M}{z_A}| \Leftrightarrow OM' = \frac{OM}{OA} = \frac{2}{2} = 1$ d'ou $\boxed{M' \in \mathscr{C}'_{(O,1)}}$

b) **i)** $-2isin(\frac{\theta}{2})e^{i(\frac{\theta}{2})} = -(e^{i(\frac{\theta}{2})} - e^{-i(\frac{\theta}{2})})e^{i(\frac{\theta}{2})} = -(e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\theta}{2})} - e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{\theta}{2})}) = 1 - e^{i(\theta)}$.

$$z' = i\frac{z}{z_A} = i\frac{-2isin(\frac{\theta}{2})e^{i(\frac{\theta}{2})}}{2e^{i\frac{\pi}{3}}} = \boxed{sin(\frac{\theta}{2})e^{i(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{3})}}$$

ii) O ,A et M sont alignés $\Leftrightarrow \dfrac{Z_{\overrightarrow{OM}}}{Z_{\overrightarrow{OA}}} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \dfrac{z}{z_A} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z' = i\dfrac{z}{z_A} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow sin(\dfrac{\theta}{2})e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{3})} \in i\mathbb{R}$

$\dfrac{\theta}{2} - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \dfrac{\theta}{2} = \dfrac{5\pi}{6} + k\pi \Leftrightarrow \theta = \dfrac{5\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ et $\theta \in]-\pi, \pi]$ d'ou $\boxed{\theta = -\dfrac{\pi}{3}}$



Exercice n 3 (6 points)

1) • $\dfrac{x^2}{4} + x = x(\dfrac{x}{4} + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -4$

x	$-\infty$		-4		0		$+\infty$
$\dfrac{x^2}{4} + x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\Rightarrow\Rightarrow f$ est définie sur $]-\infty, -4]$

• $x^2 + 7x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = -3$ ou $x = -4$, f est définie sur $]-4, -3[$

• $x + 4 \geq 0$ et $1 - \sqrt{x+4} \neq 0$, $x \geq -4$ et $x + 4 \neq 1 \Rightarrow x \neq -3 \Rightarrow f$ est définie sur $]-3, +\infty[$

Ainsi : $D_f =]-\infty, -4] \cup]-4, -3[\cup]-3, +\infty[$

2) **a)** $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -3^+} \dfrac{\sin\left(\frac{\pi x}{3}\right)}{\pi\left(1 - \sqrt{x+4}\right)} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin(t-\pi)}{t} \times \dfrac{t}{\pi\left(1 - \sqrt{\dfrac{3(t-\pi)}{\pi} + 4}\right)}$.

$= \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin(t)}{t} \times \dfrac{1}{3} \times \left(1 + \sqrt{\dfrac{3(t-\pi)}{\pi} + 4}\right) = 1 \times \dfrac{1}{3} \times 2 = \dfrac{2}{3}$, avec $t = \dfrac{\pi x}{3} + \pi$, $x = \dfrac{3(t-\pi)}{\pi}$

b) $\lim\limits_{x\to (-3)^-} f(x) = \lim\limits_{x\to (-3)^-} \dfrac{x^2 - x + 3a}{x^2 + 7x + 12} = \dfrac{12 + 3a}{0}$.

$\lim\limits_{(-3)^-} f$ est finie à condition que $12 + 3a = 0 \Leftrightarrow a = -4$.

Pour $a = -4$ on a : $\lim\limits_{x\to(-3)^-} \dfrac{x^2 - x + -12}{x^2 + 7x + 12} = \lim\limits_{x\to(-3)^-} \dfrac{(x+3)(x-4)}{(x+3)(x+4)} = \lim\limits_{x\to(-3)^-} \dfrac{(x-4)}{(x+4)} = -7$

c) $a = -4$, $\lim\limits_{x\to(-3)^-} f(x) = -7 \neq \lim\limits_{x\to -3^+} f(x) = \dfrac{2}{3} \Rightarrow f$ est non prolongeable par continuité en (-3) .

d) $a = -4$, $f(-4) = \sqrt{4-4} + 2 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{2}$ et $\lim\limits_{x\to(-4)^+} f(x) = \lim\limits_{x\to(-4)^+} \dfrac{x-4}{x+4} = \dfrac{-8}{0^+} = -\infty$

• $\lim\limits_{x\to(-4)^+} f(x) = -\infty \Rightarrow f$ est discontinue en -4 .

• La droite d'équation :$x = -4$ est une asymptoteôte à la courbe (Γ)

$D_c = D_f \setminus \{-4\} = \mathbb{R} \setminus \{-3-4\}$

3) **a)**

- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \underbrace{\sqrt{\frac{x^2}{4}+x}}_{+\infty} \underbrace{-\frac{x}{2}}_{+\infty} + \frac{1}{2} = +\infty$

- $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(-\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{x}}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2x}\right)}{x} = \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{x}}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2x} = -\frac{1}{2}-\frac{1}{2} = -1$

- $\lim_{x\to-\infty} (f(x)+x) = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{x^2}{4}+x}+\frac{x}{2}+\frac{1}{2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{\frac{x^2}{4}+x}-\frac{x}{2}}+\frac{1}{2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{x}}-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2} = \frac{1}{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$

- $\lim_{x\to-\infty} (f(x)+x+\frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow$ la droite $\Delta : y = -x-\frac{1}{2}$ est une asymptote oblique à (Γ) au voisinage de $-\infty$

b) $\forall x > 0 \ : \ |\sin(\frac{\pi x}{3})| \leq 1 \Rightarrow \frac{|\sin(\frac{\pi x}{3})|}{\pi|1-\sqrt{x+4}|} \leq \frac{1}{\pi(\sqrt{x+4}-1)} \Rightarrow |f(x)| \leq \frac{1}{\pi(\sqrt{x+4}-1)}$ or $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\pi(\sqrt{x+4}-1)} = \frac{1}{+\infty} = 0$ donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \Rightarrow$ La droite d'équation $y=0$ est une asymptote horizontale à la courbe (Γ) au voisinage de $+\infty$

Exercice n 4 (4 points)

1) **a)** g **est continue et strictement croissante sur** $]-\infty,0]$ d'où

$\boxed{g(]-\infty,0]) =]\lim_{x\to-\infty} g(x), g(0)] =]0,2]}$

f **est continue et strictement décroissante sur** $]-\infty,0[$ d'où

$\boxed{f(]-\infty,0[) =]\lim_{x\to0^-} f(x), \lim_{x\to-\infty} f(x)[=]-\infty,0[}$

f **est continue et strictement croissante sur** $]0,+\infty[$ d'où

$\boxed{f(]0,+\infty[) =]\lim_{x\to0^+} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)[=]-\infty,+\infty[}$

g **est continue et strictement décroissante sur** $[2,+\infty[$ d'où

$\boxed{g([2,+\infty[) =]\lim_{x\to+\infty} g(x), g(2)] =]-\infty,0]}$ $\quad \boxed{g(f(]-\infty,0[)) = g(]-\infty,0[) =]0,2[}$

b) $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{0^-} = -\infty$, $\quad \lim_{x\to+\infty} (2f(x)-2x) = \lim_{x\to+\infty} 2(f(x)-x) = 2b = -2$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{f(x)-x+1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$, $\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = -\infty$

c) $x-g(x) = 1 \Leftrightarrow g(x) = x-1$.$C_g \cap \Delta = \{I(\alpha,\alpha-1)\}$ donc l'équation $g(x) = x-1$ admet une unique solution $\alpha \in]1,2[$.

2) **a)** $h(x) = 0 \Leftrightarrow g(x)-f(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = f(x)$ d'ou $x = 2$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$h(x)$		+	||	+	0	−	

b) $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{h(x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{g(x)-f(x)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$ car C_g au dessus de $C_f \Rightarrow h(x) > 0$ au $V(-\infty)$