Continuité et limites $4^{ème}$ Sc Techniques Sc Expérimentales

Exercice 1

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x^3-1}{x-1} & \text{si } x > 1 \\ f(x) = 2x+1 & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$

1) Montrer que f est continue en 1.
2) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x+\sin x}{x} & \text{si } x < 0 \\ f(x) = x+2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

1) Montrer que f est continue en 0.
2) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = x+1-\sqrt{x^2+1} & \text{si } x \geq 0 \\ f(x) = \frac{\sin(x^2)}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

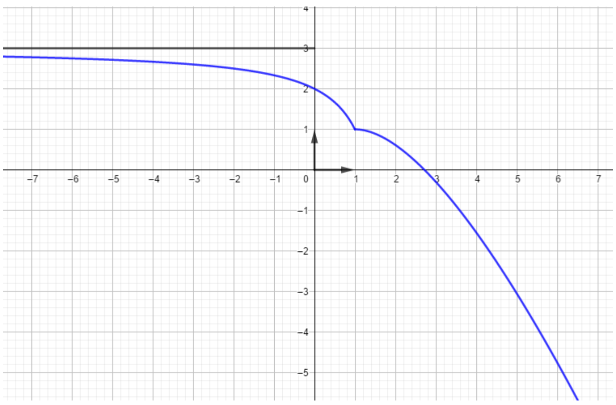
1) Montrer que f est continue en 0.
2) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
3) a) Montrer que $\forall x < 0$ on a : $\frac{1}{x} \leq f(x) \leq -\frac{1}{x}$ et en déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

   b) Interpréter le résultat graphiquement.

Exercice 4

Donner la réponse exacte

Soit f une fonction continue sur IR dont la courbe est ci-contre



1) Déterminer graphiquement

   a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

   b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$

2) Rependre par vrai ou faux

   a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(\sqrt{1-x}\right) = +\infty$

   b) $\lim\limits_{x\to-\infty} xf\left(\frac{x-1}{x}\right) = -\infty$

   c) $\lim\limits_{x\to+\infty} xf\left(\frac{x-1}{x}\right) = 0$ d) $\lim\limits_{x\to-\infty} xf\left(\frac{x-1}{x^2+2}\right) = +\infty$ e) $\lim\limits_{x\to-\infty} xf\left(\frac{x^2-1}{x}\right) = -\infty$

Exercice 5

Soit la fonction $f : x \mapsto 3x + 2\sin x$.

1) a) Montrer que pour tout réel x on a : $3x-2 \leq f(x) \leq 3x+2$.

   b) En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \begin{cases} \frac{x}{f(x)} & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{1}{5} & \text{si } x = 0 \end{cases}$

a) Montrer que g est continue en 0.

b) Montrer que pour tout $x \in \left]\frac{2}{3}, +\infty\right[$ on a : $\frac{x}{3x+2} \leq g(x) \leq \frac{x}{3x-2}$

c) En déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$. Interpréter le résultat graphiquement.

Exercice 6

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = x^2 - \sqrt{1-x} & \text{si } x < 1 \\ f(x) = x^2 + \sin(\pi x^2) & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2) **a)** Montrer que $\forall x \geq 1$ on a : $x^2 - 1 \leq f(x) \leq x^2 + 1$

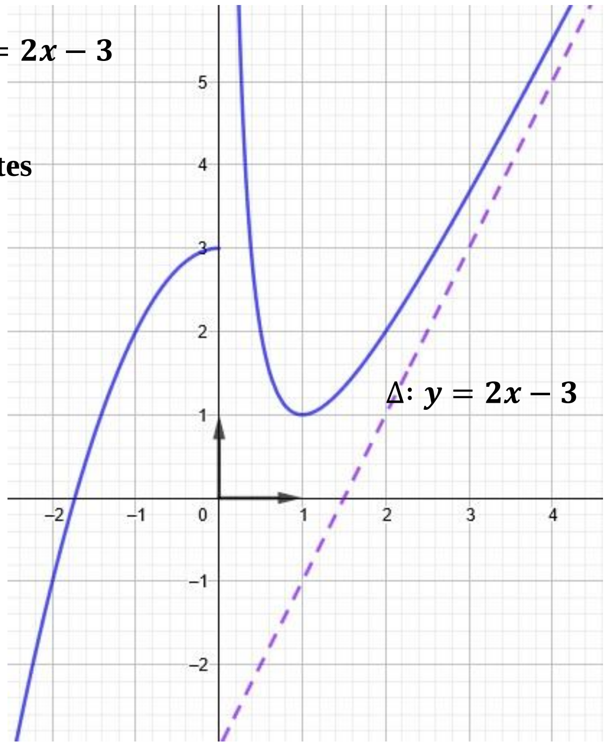
b) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

3) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

Exercice 7

I) On a représenté ci-contre la courbe C_f d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. La droite Δ d'équation $y = 2x - 3$ est une asymptote à C_f au voisinage de $+\infty$

Utiliser le graphique pour répondre aux questions suivantes



1) Déterminer la nature de chacune des branches infinies de C_f

2) Déterminer les limites suivantes

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$; $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$

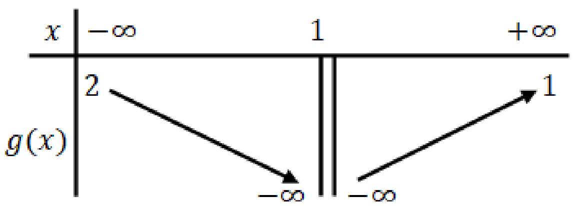
$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - 2x)$

3) Préciser la continuité de f à droite et à gauche en 0

4) Déterminer les images par f des intervalles $]-\infty, -1]$ et $]0, 2]$

5) Discuter suivant les valeurs du réel m le nombre de solution de l'équation $f(x) = m$

II) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ et dont le tableau de variation est le suivant



1) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} (f \circ g)(x)$ et $\lim\limits_{x \to 1} \frac{(f \circ g)(x)}{g(x)}$

2) Soit h une fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ on a : $\frac{2x}{x-1} \leq h(x) \leq g(x)$

Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x)$ et $\lim\limits_{x \to 1} h(x)$

3) La fonction $g \circ f$ est-elle continue en 1 ? Justifier.

Exercice 8

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x - \sin x}{1 + x^2}$

1) Déterminer le domaine de définition de f

2) a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a : $\frac{x-1}{1+x^2} \leq f(x) \leq \frac{x+1}{1+x^2}$

   b) En déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

   c) Interpréter les résultats graphiquement

3) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[-\pi, \pi]$

Exercice 9

On considère la fonction f définie comme suit: $\begin{cases} f(x) = x^3 + x & si\ x \leq 0 \\ f(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right) + 2x^2 & si\ x > 0 \end{cases}$

1) a) Montrer que pour $x > 0$ on a : $2x^2 - x \leq f(x) \leq 2x^2 + x$

   b) Déduire $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$

2) a) Etudier la continuité de f en 0.

   d) Etudier la continuité de f sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$, en déduire le domaine de continuité de f.

3) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

4) Montrer que l'équation : $f(x) = -7$ admet une unique solution α sur $]-2, -1[$

Exercice 10

On donne ci-dessous le tableau de variation d'une fonction f et soit C_f sa représentation graphique

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f(x)$	3	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-3

1) Déterminer le domaine de définition de f

2) Préciser les asymptotes à C_f

3) Déterminer avec justifications les limites suivantes $\lim\limits_{x \to 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(\frac{2x^2+1}{x^2-1}\right)$

Exercice 11

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\ f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & \text{si } x < 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1) a) En écrivant $f(x) = \frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \times x$ pour $x > 0$ déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

   b) déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

2) Etudier la continuité de f en 0

Exercice 12

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}+\frac{1-\cos x}{x^2} & \text{si } x<0\\ 2x+\sqrt{x^2+1} & \text{si } x\geq 0\end{cases}$

On désigne par Cf sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$..

1) Montrer que f est continue en 0

a) Montrer que pour tout $x<0$, $\frac{1}{2}\leq f(x)\leq \frac{1}{2}+\frac{2}{x^2}$.

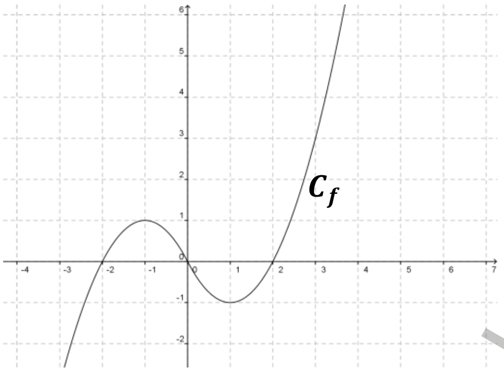
b) Déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.

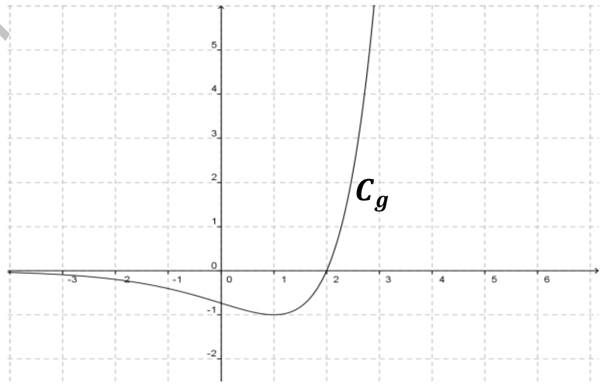
3) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Montrer que Cf admet une asymptote oblique au voisinage de $(+\infty)$ dont on précisera une équation.

Exercice 13

On considère deux fonctions f et g définies par leurs courbes C_f et C_g ci- dessous représentées.





La droite d'équation $y=0$ est une asymptote à la courbe C_g

Déterminer graphiquement $f([-1,1])$ $(f\circ g)(]-\infty,1])$ $\lim\limits_{x\to-\infty}(g\circ f)(x)$ $\lim\limits_{x\to-\infty}(f\circ g)(x)$

Exercice 14

Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x)=\begin{cases}4x^2-3x-\frac{1}{2} & \text{si } x\leq 0\\ \frac{1-\sqrt{1+x}}{x} & \text{si } x\in]0,1]\\ x+\frac{1}{2}-\cos(\sqrt{x}) & \text{si } x>1\end{cases}$

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

b) Montrer que pour tout $x\in]1,+\infty[$: $f(x)\geq x-\frac{1}{2}$ et en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) Etudier la continuité de f en 0

3) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution $\alpha\in\left]-1,-\frac{1}{2}\right[$.

Exercice 15

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases}f(x)=\sqrt{x^2-3x} & \text{si } x\leq 0\\ f(x)=\frac{3}{2}x^2+\sin x^2 & \text{si } x>0\end{cases}$ et soit C_f sa courbe représentative

1) Etudier la continuité de f en 0.

2) Montrer que f est continue sur $]-\infty\,,0[$

3) On pose $\forall x>0\ \ u(x)=x^2$ et $v(x)=\sin(x^2)$.

a) Ecrire v sous la forme d'une fonction composée.

b) En déduire que f est continue sur $]0\,,+\infty[$

4) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+x$

5) a) Montrer que $\forall x>0$ on a : $f(x)\geq \frac{3}{2}x^2-1$

b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter le résultat graphiquement

Exercice 16

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x)=\frac{1}{x^2+1}\cos x & si\ \ x<0 \\ f(x)=\frac{x^2-5x+4}{2x^2-6x+4} & si\ \ 0\leq x<1 \\ f(x)=\frac{\sqrt{4x+5}}{2} & si\ \ x\geq 1 \end{cases}$

1) Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

2) A l'aide d'un encadrement convenable, trouver $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

3) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter le résultat graphiquement

4) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} fof(x)$

Exercice 17

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\ x\left(1+cos\left(\frac{\pi}{x}\right)\right)$

1) a) Montrer que $f$est continue sur $]0;+\infty[$

b) La fonction f est elle prolongeable par continuité à droite en 0 ?

2) a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

b) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-2x)$ et interpréter graphiquement ce résultat

3) a) Montrer que f est strictement croissante sur $[1;+\infty[$

b) Montrer que l'équation $f(x)=1$ admet une unique solution α dans $[1;+\infty[$ et Vérifier que $\alpha\in\ ]1;2[$

c) Montrer que $\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)=\frac{\sqrt{2\alpha-1}}{\alpha}$.

Exercice 18

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x)=x^2\sin\frac{1}{x} & \text{si } x>0 \\ f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & \text{si } x<0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

1) a) En écrivant $f(x)=\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\times x$ pour $x>0$ déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

b) déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

2) Etudier la continuité de f en 0

Exercice 19

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1 - \cos x}{x^2} & \text{si } x < 0 \\ 2x + \sqrt{x^2 + 1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

On désigne par Cf sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$..

1) Montrer que f est continue en 0

a) Montrer que pour tout $x < 0$, $\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{2} + \frac{2}{x^2}$.

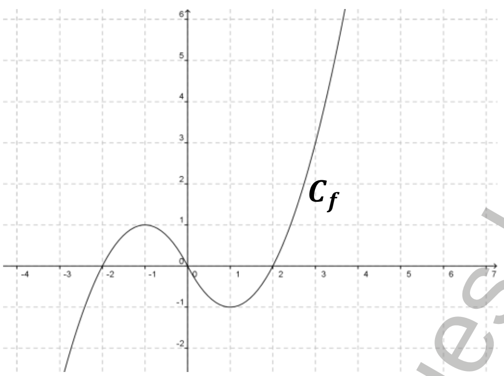
b) Déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.

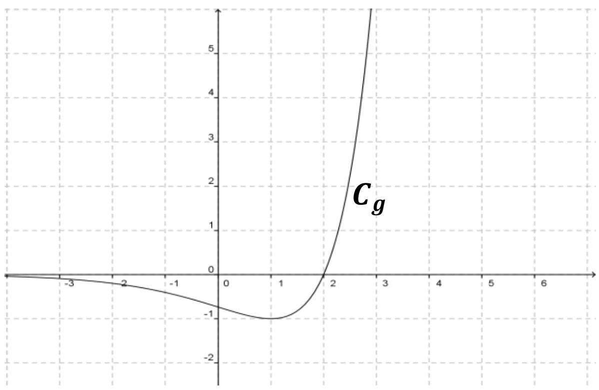
3) **a)** Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

b) Montrer que Cf admet une asymptote oblique au voisinage de $(+\infty)$ dont on précisera une équation.

Exercice 20

On considère deux fonctions f et g définies par leurs courbes C_f et C_g ci- dessous représentées.





La droite d'équation $y = 0$ est une asymptote à la courbe C_g

Déterminer graphiquement $f([-1,1])$ $(f \circ g)(]-\infty, 1])$ $\lim\limits_{x \to -\infty} (g \circ f)(x)$ $\lim\limits_{x \to -\infty} (f \circ g)(x)$

Exercice 21

Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x) = \begin{cases} 4x^2 - 3x - \frac{1}{2} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1 - \sqrt{1+x}}{x} & \text{si } x \in]0, 1] \\ x + \frac{1}{2} - \cos(\sqrt{x}) & \text{si } x > 1 \end{cases}$

1) **a)** Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

b) Montrer que pour tout $x \in]1, +\infty[$: $f(x) \geq x - \frac{1}{2}$ et en déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

2) Etudier la continuité de f en 0

3) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in \left]-1, -\frac{1}{2}\right[$.

Exercice 22

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x\left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)\right)$

1) a) Montrer que f est continue sur $]0;+\infty[$

b) La fonction f est elle prolongeable par continuité à droite en 0 ?

2) a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

b) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2x)$ et interpréter graphiquement ce résultat

3) a) Montrer que f est strictement croissante sur $[1;+\infty[$

b) Montrer que l'équation $f(x)=1$ admet une unique solution α dans $[1;+\infty[$

et Vérifier que $\alpha \in \ ]1;2[$

c) Montrer que $\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)=\frac{\sqrt{2\alpha-1}}{\alpha}$.

Exercice 23

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x)=\sqrt{x^2-3x} & \text{si } x\le 0 \\ f(x)=\frac{3}{2}x^2+\sin x^2 & \text{si } x>0 \end{cases}$ et soit C_f sa courbe représentative

1) Etudier la continuité de f en 0.

2) Montrer que f est continue sur $]-\infty,0[$

3) On pose $\forall x>0$ $u(x)=x^2$ et $v(x)=\sin(x^2)$.

a) Ecrire v sous la forme d'une fonction composée.

b) En déduire que f est continue sur $]0,+\infty[$

4) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+x$

5) a) Montrer que $\forall x>0$ on a : $f(x)\ge\frac{3}{2}x^2-1$

b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ puis interpréter le résultat graphiquement

Exercice 24

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x)=\frac{1}{x^2+1}\cos x & si \ \ x<0 \\ f(x)=\frac{x^2-5x+4}{2x^2-6x+4} & si \ \ 0\le x<1 \\ f(x)=\frac{\sqrt{4x+5}}{2} & si \ \ x\ge 1 \end{cases}$

1) Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

2) A l'aide d'un encadrement convenable, trouver $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

3) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ et interpréter le résultat graphiquement

4) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} fof(x)$