(2022-2023)

Exercice 1 :

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} -x^3+3x-1$.

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2+2x-5}{x^2-1}$

3) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{3x^2+2x-5}{x^2-1}$.

4) $\lim\limits_{x\to-1^+} \dfrac{3x^2+2x-5}{x^2-1}$

5) $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-9}$.

6) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{4x^2+1}+2x$.

7) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{4x^2+x+1}+2x$.

8) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{3x^2+x+1}+2x$

9) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{\sqrt{4x^2+x+1}-2x}{x+3}$.

10) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{\sqrt{3x-2}-2}{\sqrt{x+7}-3}$.

11) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin(2x)}{\sin(3x)}$.

12) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1-\cos(x)}{\sin(3x)}$.

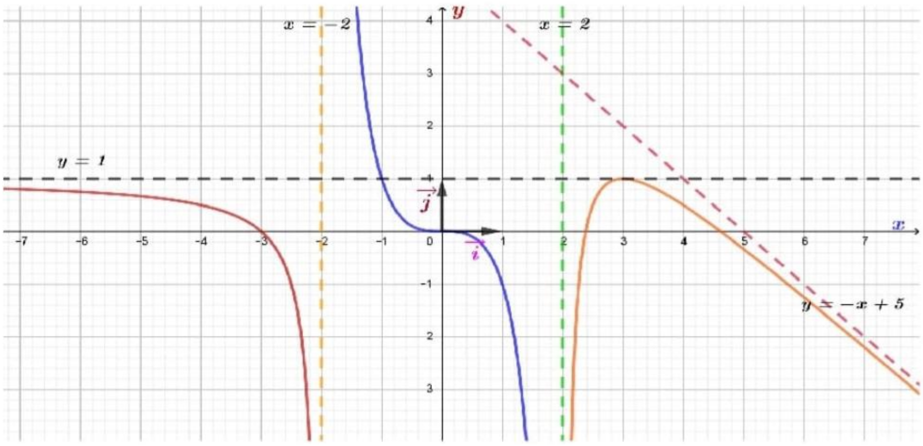
13) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1-\cos(2x)}{\sin^2(3x)}$

14) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\cos^2x-4\cos x+3}{\sin^2x}$

15) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan x$.

Exercice 2 :

La courbe ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f, dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.



Utiliser la courbe de f pour répondre aux questions suivantes.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.

2) Déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to(-2)^+} \dfrac{1}{f(x)+2}$; $\lim\limits_{x\to2} f(x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)+x-5)$ et $\lim\limits_{x\to-1} (3f(x)-5)$.

3) Donner le signe de f(x) – 1.

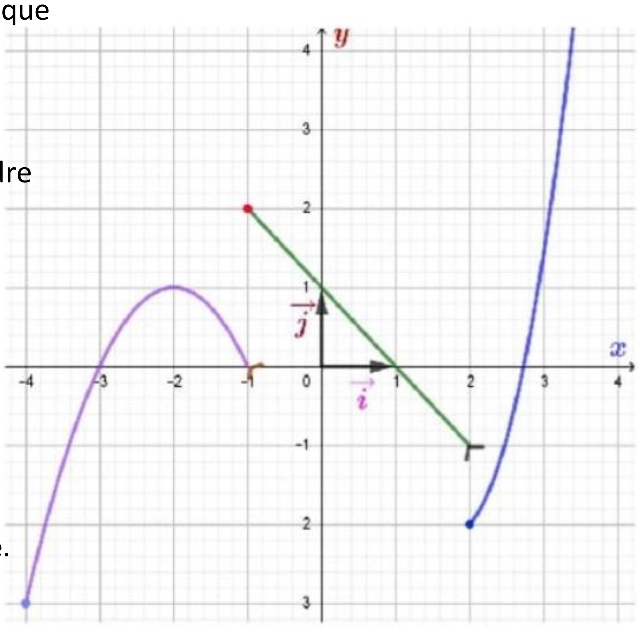
Exercice 3 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = 1 - x.\sin(\frac{\pi}{x}) & \text{si } x < 0 \\ f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x}} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

1) a) Montrer que pour tout x < 0 , $1+x \leq f(x) \leq 1-x$.
   b) Montrer alors que f est continue en 0.
   c) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
   Interpréter graphiquement le résultat trouvé.
2) a) Montrer que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ +.
   b) Déterminer l'image de $\mathbb{R}^+$ par f .
   c) Montrer que l'équation f(x) = x admet dans [0 , 1] une solution unique α.
   d. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .

Exercice 4 :

1) La courbe ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f, dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. En s'aidant de la figure, répondre aux questions suivantes.



a) Déterminer l'ensemble de définition de f.
b) f est-elle continue en –2? en – 1 ? Justifier.
c) f est-elle continue sur [–4 , –1[?
d) Donner les intervalles sur lesquels f est continue.
e) Donner f([–4,-1[).

2) Soit g la restriction de f à [2,+∞[.

On suppose que g(x) = $\frac{x^3 - 3x + 2}{\sqrt{x-1}}$.

a) Justifier la continuité de g sur [2,+∞[.
b) Montrer que l'équation g(x) = 0 admet une solution unique α ∈]2,3[.
c) Calculer g(2,5) et en déduire que α ∈]2,5;3[.
d) Vérifier que $x^3 - 3x^2 + 2 = (x-1)(x^2 - 2x - 2)$ puis déduire la valeur exacte de α.