Série d'exercices n 3

Exercice 1

Calculer les limites suivantes :

a $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-sinx}{xcosx+sinx}$ **b** $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{1+cosx}{(x-\pi)^2}$ **c** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{cos(2x)}{sin(x-\frac{\pi}{4})}$ **d** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{cosx-cos(2x)}{x(sinx+sin(2x))}$

e $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}$ **f** $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x+1}{2x+\sqrt{4x^2+1}}$ **g** $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{x-\sqrt{x^2-x+1}}$

h $\lim\limits_{x\to (-2)^-}\dfrac{x+2+\sqrt{x^2+2x}}{x+2}$

Exercice 2

1 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+\setminus\{0,1\}$ par : $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}sin(\frac{1}{x^2})}{x-1}$

(a) Montrer que $\forall x>0$: $|\sqrt{x}sin(\frac{1}{x^2})|\leq\sqrt{x}$

(b) En déduire $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$

(c) Achever les problèmes de limites

2 Soit la fonction g définie par : $\begin{cases} g(x)=\dfrac{\sqrt{3+cosx+sinx}-2}{x} & ,\text{si } x>0 \\ g(x)=\sqrt{x^2+x+1}+mx & ,\text{si } x\leq 0\end{cases}$

(a) Déterminer le domaine de définition de g

(b) Discuter suivant les valeurs de m , $\lim\limits_{x\to -\infty}g(x)$

(c) Montrer que $\lim\limits_{x\to +\infty}g(x)=0$

Exercice 3

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{cos(\pi x)-x}{x^2+1} & ,\text{si } x\leq 1 \\ f(x)=\dfrac{x^2-1}{\sqrt{1-x}} & ,\text{si } -1<x<1 \\ f(x)=\sqrt{2x^2-x-1}-x\sqrt{2} & \text{si } x\geq 1\end{cases}$

(C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1 Déterminer le domaine de définition de f

2 Montrer que $\forall x\leq 1$, $\dfrac{-1-x}{x^2+1}\leq f(x)\leq\dfrac{1-x}{x^2+1}$. En déduire $\lim\limits_{x\to -\infty}f(x)$

3 Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)$

4 Achever l'étude des problèmes de limites

Exercice 4

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x)=\sqrt{x^2+3}+2x-3 & ,\text{si } x\leq 1 \\ f(x)=\dfrac{sin(x-1)}{x-1} & ,\text{si } x>1 \end{cases}$

(C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. Montrer que $\forall x>1$, $\dfrac{-1}{x-1}\leq f(x)\leq \dfrac{1}{x-1}$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x$ .interpréter graphiquement les résultats obtenus.

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=2\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

1. Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet au moins une solution $\alpha\in]3;4[$

2. Soit g la fonction définie sur $[0;\pi]$ par : $g(x)=f(cotanx)$ si $x\in]0;\pi[$, $g(0)=4$ et $g(\pi)=0$

   a. Montrer que g est continue sur $[0;\pi]$

   b. Vérifier que : $\forall x\in[0;\pi]$ on a : $g(x)=2(1+cosx)$

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}+2x}{x^2+1} & ,\text{si } x>0 \\ f(x)=x^2+2x+1 & ,\text{si } x\leq 0 \end{cases}$

(C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. a. Montrer que $\forall x\geq 0$, $0\leq f(x)\leq \dfrac{3x+1}{x^2+1}$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

   b. Étudier la continuité de f en 0

2. a. Étudier les variations de f sur $]-\infty;0]$

   b. Montrer que : $f(x)=0$ admet dans $]-\infty;0]$ une unique solution α et que $-0.5<\alpha<-0.4$

3. La courbe $\mathcal{C}_g$ ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction g définie sur $\mathbb{R}$. Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(f(x))$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(g(x))$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(g(x))$