Bac Scientifique

Exercice 1

Calculer les limites suivantes

1) $\lim_{+\infty}(\frac{1-3x}{2x+1})$ 2) $\lim_{-\infty}(\frac{x^2+1}{x+1}-3x)$ 3) $\lim_{+\infty}(\frac{x^n-3x}{x^2+2})$; $n \in IN$

4) $\lim_{1}(\frac{x^3-1}{x^2+x-2})$ 5) $\lim_{0}(\frac{4x}{|x+1|-|x-1|})$ 6) $\lim_{0}(\frac{\sin(5x)}{2x})$ 7) $\lim_{0}(\frac{\tan(3x)}{\sin x})$

8) $\lim_{0}(\frac{\sin(2x)-2\sin x}{x^3})$ 9) $\lim_{0}(\frac{1-\cos(3x)}{\sin^2 x})$ 10) $\lim_{\frac{\pi}{4}}(\frac{\cos(x+\frac{\pi}{4})}{\sqrt{2}-2\sin x})$

11) $\lim_{+\infty}(2x-\sqrt{1+x^2})$ 12) $\lim_{+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-3x)$

13) $\lim_{+\infty}(x+\sqrt{3x^2+1})$ 14) $\lim_{+\infty}(\sqrt{4x^2+1}+2x-1)$

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{2+\cos x}-\sqrt{3}}{x^2} & si\ x\neq 0\\ -\frac{\sqrt{3}}{12} & si\ x=0\end{cases}$

1) Montrer que f est continue en 0

2) a) Montrer que $(\forall x\in IR^*);\ |f(x)|\leq\frac{2\sqrt{3}}{x^2}$

b) En déduire $\lim_{|x|\to\infty} f(x)$

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=2x+\frac{x^2-5x+6}{|x^2-9|-|x-3|}$

1) déterminer D le domaine de définition de f

2) la fonction f admet-elle un prolongement par continuité en 3 ?

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=\frac{(1-\tan x)^2}{1+\cos(4x)}$

1) déterminer D le domaine de définition de f

2) a) Soit $h\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\setminus\left\{\frac{\pi}{4}\right\}$. Montrer que $f\left(\frac{\pi}{4}+h\right)=\frac{2\tan^2 h}{(1-\tan h)^2.\sin^2(2h)}$

b) Montrer que f est prolongeable par continuité en $\frac{\pi}{4}$

Exercice 5

1) Résoudre dans IR l'équation $\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x}=1$

2) Soit h une fonction continue sur $[0,2]$ tel que : $h(0)=h(2)$

Montrer que l'équation $h(x+1)=h(x)$ admet au moins une solution dans $[0,1]$

3) Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{+\infty} x(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}-1) \quad ; \quad \lim_{-\infty}(\sqrt[4]{x^4+x^2+1}+x-2)$$

Exercice 6

Soit $f(x)=\frac{\tan(\pi x)}{x-E(x)}$

1) déterminer D le domaine de définition de f

2) calculer $\lim_{(\frac{\pi}{2})^-} f(x)$

3) la fonction f admet-elle un prolongement par continuité en 0 ?

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur par $f(x)=\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}$

1) a) Déterminer le domaine de définition de f

b) Etudier la parité de la fonction f

2) Montrer que $\left(\forall x\in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[\right); 0<f(x)<\tan(\frac{x}{2})$

3) Montrer que la fonction f est prolongeable par continuité en 0

Exercice 8

1) Soit f la fonction définie sur IR^* par $f(x)=1-xE(\frac{1}{x})$.

Montrer que $(\forall x\in IR^*)$; $|f(x)|\leq |x|$ et en déduire que f est prolongeable par continuité en 0

2) Soit g la fonction définie sur IR^* par $g(x)=(\sin x)\,E(\frac{1}{x})$.

a) Montrer que $(\forall x\in]0,\pi[)$; $\frac{\sin x}{x}-\sin x<g(x)<\frac{\sin x}{x}$ et

$(\forall x\in]-\pi,0[)$; $\frac{\sin x}{x}<g(x)<\frac{\sin x}{x}-\sin x$

b) la fonction g admet-elle un prolongement par continuité en 0 ?

3) soit h la fonction définie sur IR^* par $h(x) = \frac{x-E(x)}{\sqrt{|x|}}$

La fonction g admet-elle un prolongement par continuité en 0 ?

Exercice 9

On considère la fonction f définie par $f(x) = x - 2\sqrt{x-2} - 3$

1) déterminer : $\lim_{+\infty} f(x) et \ \lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat

2) vérifier que f est continue sur $[2, +\infty[$

3) Etudier la dérivabilité de f à droite en 2 et interpréter le résultat

4) a) Montrer que f est dérivable sur $]2, +\infty[$ puis déterminer $f'(x)$

 b) donner l'équation de la tangente (T)à C_f au point d'abscisse 6

 c) Etudier les variations de f et en déduire que $(\forall x \in [2, +\infty[); f(x) \geq 1$

5) Soit g la restriction de f sur $]3, +\infty[$

 a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera

 b) Donner le tableau de variation de g^{-1} et calculer $g(6)$

 c) Montrer que g^{-1} est dérivable en -1 puis déterminer $(g^{-1})'(-1)$

 d) Vérifier que $(\forall x \in]3, +\infty[); g(x) = \left(\sqrt{x-2} - 1\right)^2 - 2$

 e) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$

Exercice 10

On considère la fonction f définie par $f(x) = x - 2\sqrt{x+1}$

1) Etudier les branches infinies à C_f

2) vérifier que f est continue sur D_f

3) Etudier la dérivabilité de f à droite en -1 et interpréter le résultat

4) a) Montrer que f est dérivable sur $]-1, +\infty[$ puis déterminer $f'(x)$

 b) donner le tableau de variation de f

 c) en déduire que $(\forall x \in [-1, +\infty[); x + 2 \geq 2\sqrt{x+1}$

 d) montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]4,5[$

e) déterminer un encadrement de α d'amplitude 0.5

5) Soit g la restriction de f sur $]0,+\infty[$

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera

b) Donner le tableau de variation de g^{-1} et calculer $g(8)$

c) Montrer que g^{-1} est dérivable en 2 puis déterminer $\lim_{2} \frac{g^{-1}(x)-8}{x-2}$

d) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$