Continuité et limites 4ème Sc Expérimentales

Exercice 1

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^3-1}{x-1} & \text{si } x > 1 \\ f(x) = 2x+1 & \text{si } x \le 1 \end{cases}$

1) Montrer que f est continue en 1.

2) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x+\sin x}{x} & \text{si } x < 0 \\ f(x) = x+2 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

1) Montrer que f est continue en 0.

2) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = x+1-\sqrt{x^2+1} & \text{si } x \ge 0 \\ f(x) = \dfrac{\sin x^2}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

1) Montrer que f est continue en 0.

2) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3) a) Montrer que $\forall x < 0$ on a : $\dfrac{1}{x} \le f(x) \le -\dfrac{1}{x}$ et en déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

b) Interpréter le résultat graphiquement

Exercice 4

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = x^2-\sqrt{1-x} & \text{si } x < 1 \\ f(x) = x^2+\sin(\pi x^2) & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2) a) Montrer que $\forall x \ge 1$ on a : $x^2-1 \le f(x) \le x^2+1$

b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Exercice 5

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = x^2 \sin\dfrac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\ f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & \text{si } x < 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1) a) En écrivant $f(x) = \dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \times x$ pour $x > 0$ déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

b) déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2) Etudier la continuité de f en 0

Exercice 6

On considère deux fonctions f et g définies par leurs courbes C_f et C_g ci- dessous représentées.

La fonction f est définie sur $]-\infty\,,-1]$ et la fonction g est définie sur $]2\,,4]$.

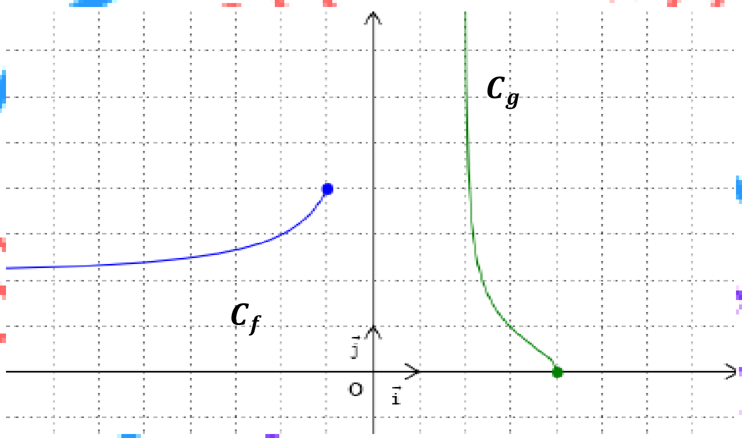
1) Donner graphiquement : $f(-1)$ $f(-2)$ $g(3)$ $g(4)$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ $\lim\limits_{x\to2^+} g(x)$

2) Déterminer $(g \circ f)([-2\,,-1])$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(g \circ f)(x)$.

3) a) Montrer que pour tout réels a et b tel que $a < b \leq -1$ on a : $(g \circ f)(a) > (g \circ f)(b)$

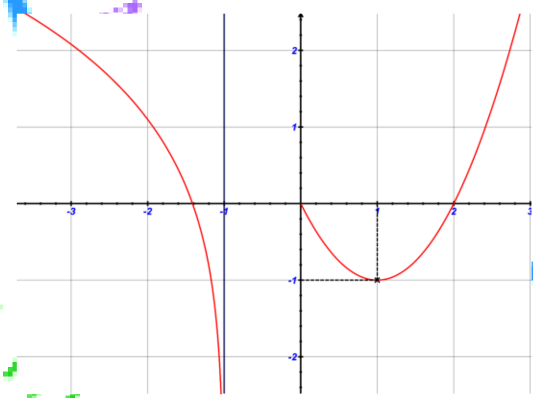
   b) En déduire le sens de variation de $g \circ f$ sur $]-\infty\,,-1]$.

4) Montrer que l'équation $(g \circ f)(x) = \frac{1}{2}$ admet une solution unique α dans $]-2\,,-1[$



Exercice 7

Soit f une fonction continue sur $]-\infty\,,-1[\,\cup\,[0\,,+\infty]$ dont la courbe représentative est donnée ci dessous.



Par lecture graphique, déterminer :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; ; ; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(\sqrt{1-x})$; $\lim\limits_{x\to-\infty} xf\left(\frac{x-1}{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} xf\left(\frac{-x+1}{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(\frac{2x^2-3}{x^2+1}\right)$

Exercice 8

On considère la fonction f définie comme suit: $\begin{cases} f(x) = x^3 + x & si\ x \leq 0 \\ f(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right) + 2x^2 & si\ x > 0 \end{cases}$

1) a) Montrer que pour $x > 0$ on a : $2x^2 - x \leq f(x) \leq 2x^2 + x$

   b) Déduire $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$

2) a) Etudier la continuité de f en 0.

d) Etudier la continuité de f sur chacun des intervalles $]-\infty\,,0[$ et $]0\,,+\infty[$, en déduire le domaine de continuité de f.

3) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

4) Montrer que l'équation : $f(x) = -7$ admet une unique solution α sur $]-2\,,-1[$

Exercice 9

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1+\sqrt{x}\cos x}{x+1} & si\ x \geq 0 \\ \dfrac{x^2}{2\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)} & si\ x < 0 \end{cases}$ et soit C_f sa courbe représentative

1) a) Vérifier que pour tout $x \geq 0$ on a : $\dfrac{1-\sqrt{x}}{x+1} \leq f(x) \leq \dfrac{1+\sqrt{x}}{x+1}$

b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat obtenue

2) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(f(x)+\dfrac{1}{2}x\right)$ et interpréter graphiquement le résultat obtenue

3) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$

4) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} f\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f\circ f(x)$

5) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution α dans l'intervalle $\left]\dfrac{\pi}{2}\,,\pi\right[$

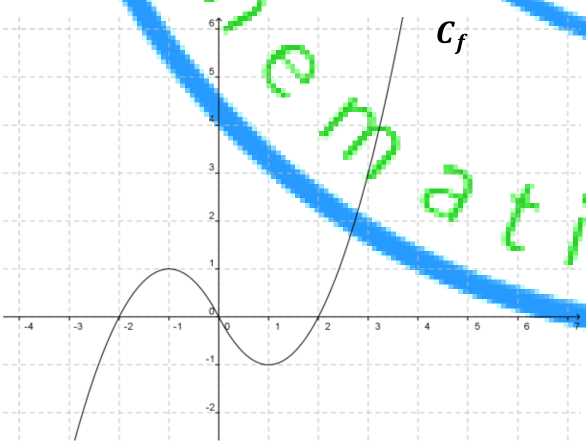
b) Montrer que $\tan\alpha = -\sqrt{\alpha - 1}$

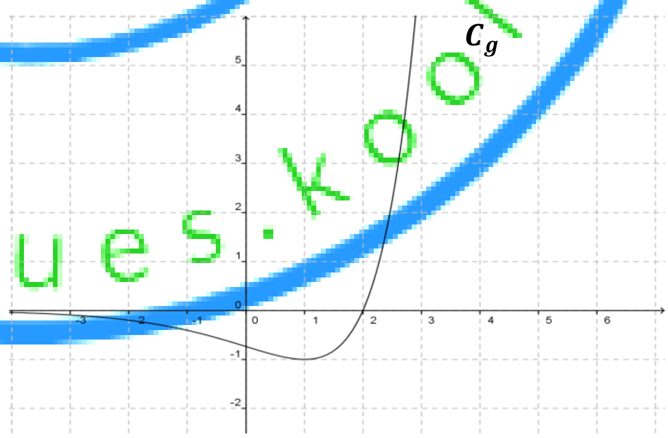
6) Soit g la fonction définie sur $\left[0\,,\dfrac{\pi}{2}\right]$ par $g(x) = \begin{cases} f\left(\dfrac{1}{\cos x}\right) & \text{si } x \neq \dfrac{\pi}{2} \\ 0 & \text{si } x = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

Montrer que g est continue sur $\left[0\,,\dfrac{\pi}{2}\right]$

Exercice 10

On considère deux fonctions f et g définies par leurs courbes C_f et C_g ci- dessous représentées.





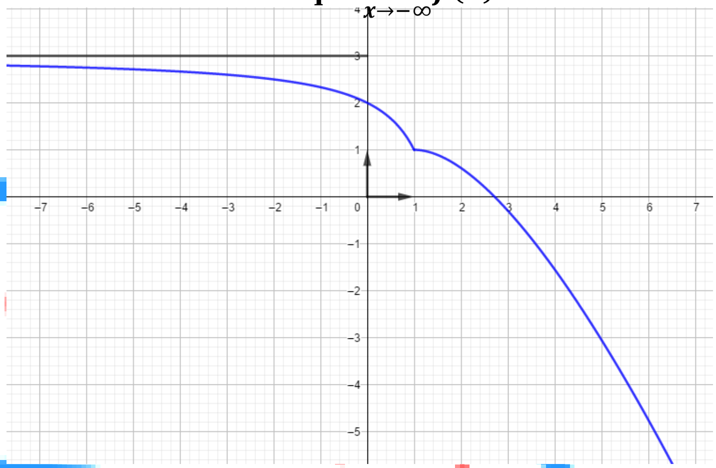
La droite d'équation $y = 0$ est une asymptote à la courbe C_g

Déterminer graphiquement $f([-1\,,1])$ $(f\circ g)(]-\infty\,,1])$ $\lim\limits_{x\to-\infty}(g\circ f)(x)$ $\lim\limits_{x\to-\infty}(f\circ g)(x)$

Exercice 11

Donner la réponse exacte

Soit f une fonction continue sur IR dont la courbe est la suivante sachant que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 3$ alors



a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(\sqrt{1-x}) = +\infty$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} xf\left(\frac{x-1}{x}\right) = -\infty$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} xf\left(\frac{x-1}{x}\right) = 0$ d) $\lim\limits_{x\to-\infty} xf\left(\frac{x-1}{x^2+2}\right) = +\infty$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty} xf\left(\frac{x^2-1}{x}\right) = -\infty$

Exercice 12

Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x) = \begin{cases} 4x^3 - 3x - \frac{1}{2} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1-\sqrt{1+x}}{x} & \text{si } x \in]0,1] \\ x + \frac{1}{2} - \cos(\sqrt{x}) & \text{si } x > 1 \end{cases}$

1) a) **Calculer** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

b) **Montrer que pour tout** $x \in]1, +\infty[$: $f(x) \geq x - \frac{1}{2}$ **et en déduire** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) **Etudier la continuité de f en 0**

3) **Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution** $\alpha \in \left]-\frac{1}{2}, 0\right[$.

Exercice 13

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \sqrt{3x^2 + x + 2} & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = \frac{2\sqrt{1-\cos x}}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

1) a) **Déterminer** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

b) **Montrer que pour $x > 0$ on a :** $0 \leq f(x) \leq \frac{2\sqrt{2}}{x}$ **et en déduire** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) **Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.**

Exercice 14

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2 - 3x} & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = \frac{3}{2}x^2 + \sin x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ **et soit C_f sa courbe représentative**

1) **Etudier la continuité de f en 0.**

2) **Montrer que f est continue sur $]-\infty, 0[$**

3) **On pose** $\forall x > 0$ $u(x) = x^2$ **et** $v(x) = \sin(x^2)$.

a) **Ecrire v sous la forme d'une fonction composée.**

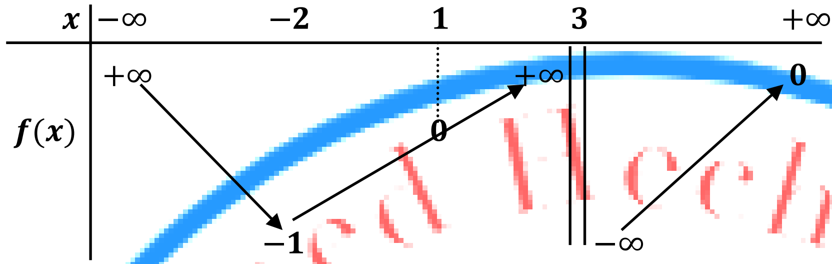
b) **En déduire que f est continue sur $]0, +\infty[$**

4) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+x$

5) Montrer que $\forall x>0$ on a : $f(x)\geq \frac{3}{2}x^2-1$ et en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Exercice 15

Soit f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ dont son tableau de variation est donné ci-dessous



1) Déterminer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{f(x)}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{f(x)}$ $\lim\limits_{x\to1^+} \frac{1}{f(x)}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{f(x)}$ $\lim\limits_{x\to3} \frac{1}{f(x)}$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$

2) a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet exactement deux solutions.

(α est la solution différente de 1)

b) En déduire le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

Exercice 16

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x)=\frac{1}{x^2+1}\cos x & si\ \ x<0 \\ f(x)=\frac{x-2}{x^2-3x+2} & si\ \ \leq x<2 \\ f(x)=\sqrt{x^2-3} & si\ \ x\geq 2 \end{cases}$

1) A l'aide d'un encadrement convenable, trouver $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x$

3) Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 17

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x\left(1+\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)\right)$

1) a) Montrer que f est continue sur $]0;+\infty[$

b) La fonction f est elle prolongeable par continuité à droite en 0 ?

2) a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

b) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-2x)$ et interpréter graphiquement ce résultat

3) a) Montrer que f est strictement croissante sur $[1;+\infty[$

b) Montrer que l'équation $f(x)=1$ admet une unique solution α dans $[1;+\infty[$et Vérifier que $\alpha\in$ $]1;2[$

c) Montrer que $\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)=\frac{\sqrt{2\alpha-1}}{\alpha}$

Exercice 18

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} \frac{x+\cos(\pi x)}{x-1} & si\ \ x<1 \\ \sqrt{x^2+x+2}-x & si\ \ x\geq 1 \end{cases}$

1) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\frac{1}{2}$ et interpréter le résultat graphiquement

b) Montrer que pour tout $x<1$ on a : $\frac{x+1}{x-1}\leq f(x)\leq 1$

c) En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2) a) Montrer que pour tout $x<1$ on a : $\frac{1+\cos(\pi x)}{x-1}=\frac{1-\cos(\pi(x-1))}{x-1}$

b) En déduire $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ (On pourra poser $U(x)=\pi(x-1)$)

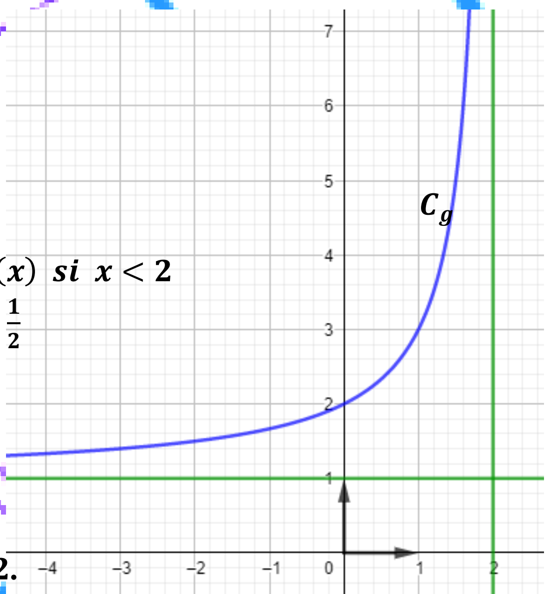
c) Montrer que f est continue en 1

3) a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution α dans $\left]-\frac{1}{2}\,,0\right[$

b) Montrer que $\sin(\pi\alpha)=-\sqrt{1-\alpha^2}$

4) On donne ci-contre la courbe C_g représentation graphique d'une fonction g continue sur $]-\infty\,,2[$

Les droites d'équation $x=2$ et $y=1$ sont les asymptotes à C_g



a) Déterminer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to-\infty}(g\circ f)(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(f\circ g)(x)$

b) Soit la fonction h définie sur $]-\infty\,,2]$ par : $h(x)=\begin{cases}(f\circ g)(x) & si\ \ x<2 \\ h(2)=\frac{1}{2}\end{cases}$

Montrer que h est continue sur $]-\infty\,,2]$

Exercice 19

Soit la fonction $f : x\mapsto 3x+2\sin x$.

1) a) Montrer que pour tout réel x on a : $3x-2\leq f(x)\leq 3x+2$.

b) En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=\begin{cases}\frac{x}{f(x)} & \text{si } x\neq 0 \\ \frac{1}{5} & \text{si } x=0\end{cases}$

a) Montrer que g est continue en 0.

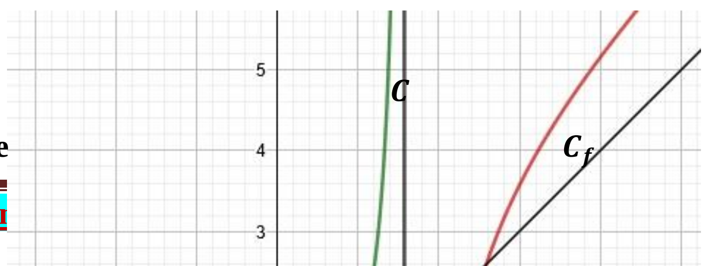
b) Montrer que pour tout $x\in\left]\frac{2}{3}\,,+\infty\right[$ on a : $\frac{x}{3x+2}\leq g(x)\leq\frac{x}{3x-2}$

c) En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$. Interpréter le résultat graphiquement.

Exercice 20

On a représenté ci-contre la courbe C_f d'une fonction f dans un repère orthonormé $(O\,,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$

C_f admet une branche parabolique de direction la droite



$y = x$ et deux asymptotes $y = \frac{1}{2}$ et $x = \frac{\pi}{2}$

La courbe C est celle de la restriction sur $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right[$ de la

fonction $x \mapsto \tan x$

1) **a)** Déterminer graphiquement : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ $\quad y = \frac{1}{2}$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$

b) En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} \tan(\pi f(x))$, $\lim\limits_{x\to 0^+} (\tan x) \times f\left(\frac{1}{\tan x}\right)$

2) Soit h la fonction définie sur $]-\pi\,,\pi[\setminus\{0\}$ par :

$h(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$

a) Etudier la parité de h $\quad x = \frac{\pi}{2}$

b) Montrer que pour tout $x \in \left]0\,,\frac{\pi}{2}\right[$ on a : $\sin x < x < \tan x$

c) En déduire que pour tout $x \in \left]0\,,\frac{\pi}{2}\right[$ on a :$0 < h(x) < \frac{1-\cos x}{\sin x}$

d) Montrer alors que h est prolongeable par continuité en 0

3) **a)** Montrer que h est continue sur $]-\pi\,,\pi[\setminus\{0\}$

b) Montrer que l'équation : $2h(x) - 1 = 0$ admet dans $\left]\frac{\pi}{2}\,,\frac{2\pi}{3}\right[$ au moins une solution