Dans tous les exercices le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3x + 2\sin x$

1) a) Montrer que pour tout réel x : $3x - 2 \leq f(x) \leq 3x + 2$

b) En déduire les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

2) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{f(x)} & \text{si } x \neq 0 \\ \dfrac{1}{5} & \text{si } x = 0 \end{cases}$

a) Montrer que g est continue en 0

b) Montrer que pour tout $x \in \left]\frac{2}{3}, +\infty\right[$ on a : $\frac{x}{3x+2} \leq g(x) \leq \frac{x}{3x-2}$

c) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ et interpréter graphiquement le résultat obtenue.

Exercice 2

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = x + 1 - \sqrt{x^2 + 1} & \text{si } x \geq 0 \\ f(x) = \dfrac{\sin x^2}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

1) Montrer que f est continue en 0.

2) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat obtenue

3) Montrer que $\forall x < 0$ on a : $\frac{1}{x} \leq f(x) \leq -\frac{1}{x}$ puis calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat obtenue

Exercice 3

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = x^2 - \sqrt{1 - x} & \text{si } x < 1 \\ f(x) = x^2 + \sin(\pi x^2) & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2) a) Montrer que $\forall x \geq 1$ on a : $x^2 - 1 \leq f(x) \leq x^2 + 1$

b) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

c) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat obtenue

3) a) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

b) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat obtenue.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x\left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)\right)$

1) a) Montrer que f est continue sur $]0; +\infty[$

b) La fonction f est elle prolongeable par continuité à droite en 0 ?

2) a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

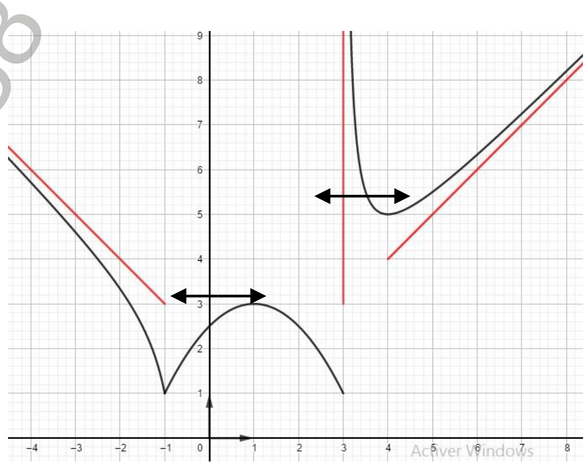
b) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-2x)$ et interpréter graphiquement ce résultat

3) a) Montrer que f est strictement croissante sur $[1;+\infty[$

b) Montrer que l'équation $f(\mathrm{x}) = 1$ admet une unique solution α dans $[1;+\infty[$ et vérifier que : $\alpha \in \,]1;2[$

c) Montrer que $\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right) = \frac{\sqrt{2\alpha-1}}{\alpha}$

Exercice 5



On a représenté ci-contre la courbe C_f d'une fonction f.

Les droites d'équations $y = x$, $y = -x+2$ et $x = 3$ sont des asymptotes à C_f

1) a) Déterminer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x^2$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to3^+} f(x)\sin\left(\frac{\pi}{f(x)}\right)$

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{(f\circ f)(x)}{x} = -1$

c) Montrer alors que la représentation graphique de $f \circ f$ admet une asymptote oblique au voisinage de $-\infty$ que l'on déterminera

2) Montrer que la fonction $f \circ f$ est strictement croissante sur $[1\,,3]$

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} \frac{1+\sqrt{x}\cos x}{x+1} & si\ x \geq 0 \\ \frac{x^2}{2\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)} & si\ x < 0 \end{cases}$ et soit C_f sa courbe représentative

1) a) Vérifier que pour tout $x \geq 0$ on a : $\frac{1-\sqrt{x}}{x+1} \leq f(x) \leq \frac{1+\sqrt{x}}{x+1}$

b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat obtenue

2) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(f(x)+\frac{1}{2}x\right)$ et interpréter graphiquement le résultat obtenue

3) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$

4) Déterminer $\lim\limits_{x\to0^+} f\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f\ o\ f(x)$

5) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution α dans l'intervalle $\left]\frac{\pi}{2}\,,\pi\right[$

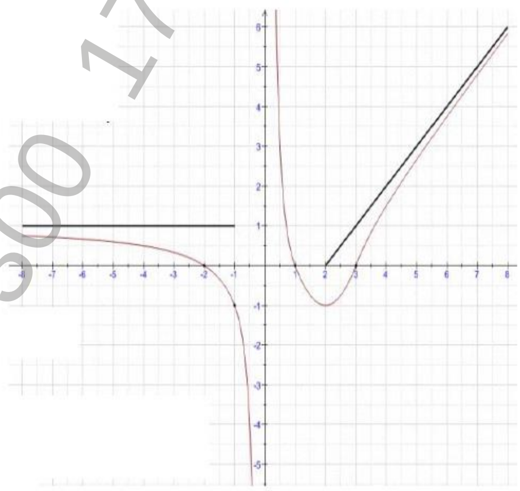
b) Montrer que $\tan\alpha = -\sqrt{\alpha-1}$

6) Soit g la fonction définie sur $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]$ par $g(x) = \begin{cases} f\left(\frac{1}{\cos x}\right) & \text{si } x \neq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{si } x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Montrer que g est continue sur $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]$.

Exercice 7

La courbe ci-contre est celle d'une fonction f définie et continue sur $\mathbb{R}^*$. Les droites d'équations : $y = 1$, $x = 0$ et $y = x - 2$ sont des asymptotes à C_f.



1) Par une lecture graphique déterminer

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{f(x) - x + 2} \;\; ; \;\; \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{f(x) - 1} \;\; \text{et} \;\; \lim_{x\to+\infty} f(x - f(x))$$

2) a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f \circ f$.

b) Résoudre graphiquement l'inéquation : $(f \circ f)(x) \leq -1$

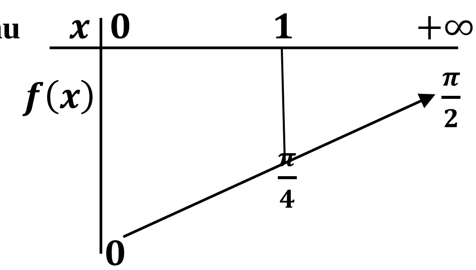
3) Soit la fonction g définie par : $g(x) = \begin{cases} f\left(\frac{-x}{\sin x}\right) & si \;\; x \in]0\,,\pi[\\ -1 & si \quad x = 0 \\ 1 & si \quad x = \pi \end{cases}$

a) Montrer que g est continue sur $[0\,,\pi]$.

b) Montrer que l'équation $g(x) = x - 2$ admet dans $]0\,,\pi[$ au moins une solution.

Exercice 8

On considère la fonction f définie, continue sur $\mathbb{R}$ dont le tableau de variation est donné ci-contre sur $[0\,,+\infty[$ et soit C_f sa courbe représentative.



* la fonction f est impaire

* Pour tout réel $x > 0$ on a : $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$ (1)

* Pour tout réel $x > 0$ on a : $x - \frac{x^3}{3} \leq f(x) \leq x$ (2)

1) a) Montrer que la courbe C_f admet deux asymptotes dont on précisera les équations.

b) Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{x+1}$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]0\,,1[$

2) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} g(x) = x^2\left(f\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right) & si \;\; x \neq 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$

Montrer que la fonction g est impaire.

3) a) On utilisant la propriété (2) , montrer que pour tout réel $x > 0$ on a : $-\frac{1}{3x} \leq g(x) \leq 0$

b) Calculer alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$

c) Interpréter les résultats graphiquement

4) a) Montrer que pour tout réel $x > 0$ on a : $g(x) = x^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} - f(x)\right)$

b) En déduire que g est continue en 0.

Exercice 9

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} \frac{x+\cos(\pi x)}{x-1} & si \;\; x < 1 \\ \sqrt{x^2 + x + 2} - x & si \;\; x \geq 1 \end{cases}$

1) **a)** Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{2}$ et interpréter le résultat graphiquement

b) Montrer que pour tout $x < 1$ on a : $\frac{x+1}{x-1} \leq f(x) \leq 1$

c) En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2) **a)** Montrer que pour tout $x < 1$ on a : $\frac{1+\cos(\pi x)}{x-1} = \frac{1-\cos(\pi(x-1))}{x-1}$

b) En déduire $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$ (On pourra poser $U(x) = \pi(x-1)$)

c) Montrer que f est continue en 1

3) **a)** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution α dans $\left]-\frac{1}{2}, 0\right[$

b) Montrer que $\sin(\pi\alpha) = -\sqrt{1-\alpha^2}$

4) On donne ci-dessous la courbe C_g représentation graphique d'une fonction g continue sur $]-\infty, 2[$

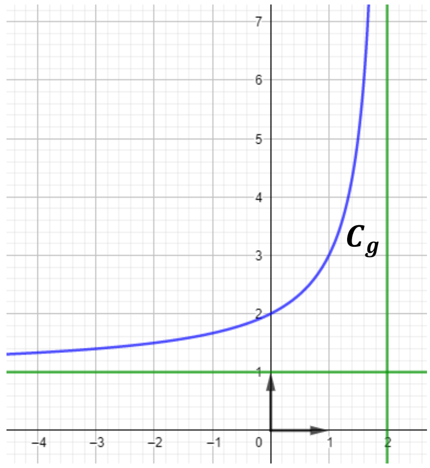
Les droites d'équation $x = 2$ et $y = 1$ sont les asymptotes à C_g

a) Déterminer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to-\infty} (g \circ f)(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} (f \circ g)(x)$

b) Soit la fonction h définie sur $]-\infty, 2]$ par : $h(x) = \begin{cases} (f \circ g)(x) & si\ x < 2 \\ h(2) = \frac{1}{2} \end{cases}$

Montrer que h est continue sur $]-\infty, 2]$

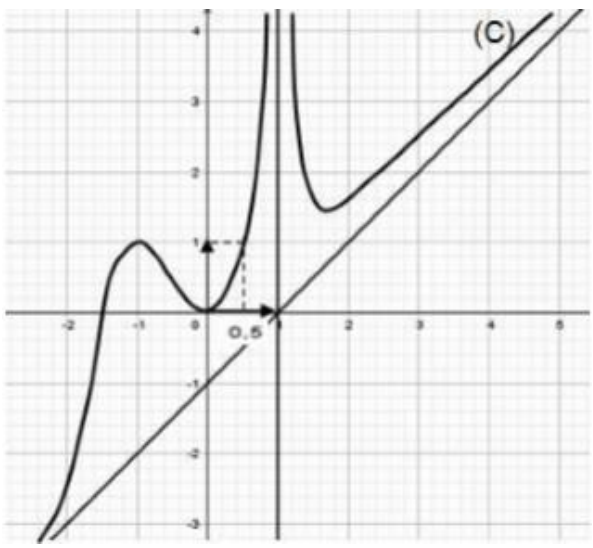


Exercice 10

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ dont la courbe représentative (C) est donnée ci-contre

La droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$ et au voisinage de $+\infty$

La droite d'équation $x = 1$ est asymptote à (C)



1) Par une lecture graphique déterminer

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to1} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) **a)** Déterminer les limites suivantes

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{f(x)}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x-f(x)-1}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x^2)$

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\cos(f(x))-2}{f(x)} = 0$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x))^2 \left(\cos\left(\frac{1}{f(x)}\right) - 1\right) = -\frac{1}{2}$

3) Soit la fonction g définie par $g(x) = (f \circ f)(x)$ on note C_g sa courbe représentative

a) Déterminer le domaine de définition de g

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = 1$

c) En déduire que C_g admet une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ que l'on déterminera

b) Montrer que la fonction g est strictement décroissante sur $]-1\,,0]$

4) Soit n un entier naturel non nul

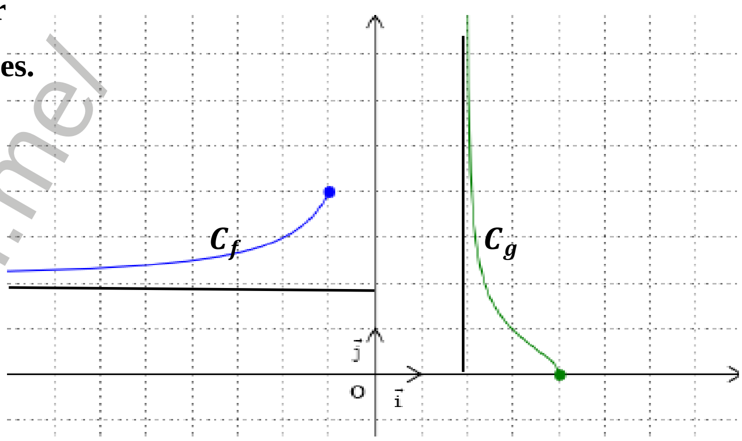
Justifier que l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet dans $[-1\,,1]$ exactement deux solutions α_n et β_n tels que $\alpha_n \in\,]-1\,,0]$ et $\beta_n \in\,]0\,,1[$

Exercice 11

On considère deux fonctions f et g définies par leurs courbes C_f et C_g ci- dessous représentées.

La fonction f est définie sur $]-\infty\,,-1]$ et la fonction g est définie sur $]2\,,4]$.

La droite d'équation $y = 2$ est une asymptote à C_f au voisinage de $-\infty$ et la droite d'équation $x = 2$ est une asymptote à C_g



1) Donner graphiquement : $f(-1)$ $f(-2)$ $g(3)$ $g(4)$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ $\lim\limits_{x\to2^+} g(x)$

2) Déterminer $(g \circ f)([-2\,,-1])$ $\lim\limits_{x\to-\infty} (g \circ f)(x)$.

3) a) Montrer que pour tout réels a et b tel que $a < b \leq -1$ on a : $(g \circ f)(a) > (g \circ f)(b)$

b) En déduire le sens de variation de $g \circ f$ sur $]-\infty\,,-1]$.

4) Montrer que l'équation $(g \circ f)(x) = \frac{1}{2}$ admet une solution unique α dans $]-2\,,-1[$

Exercice 12

Pour tout entier ≥ 2 , on définit la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f_n(x) = 2 + (x-2)\sin\left(\dfrac{1}{x-2}\right) & \text{si } x > 2 \\ f_n(x) = \dfrac{1}{4}(x^3 + nx - 2n) & \text{si } x \leq 2 \end{cases}$$

On désigne par C_n la représentation graphique de f_n dans un repère orthonormé $(O\,,\vec{i}\,,\vec{j})$

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f_n(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat.

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 3$. Interpréter graphiquement le résultat graphiquement

2) a) Montrer que pour tout $x > 2$; on a : $4 - x \leq f_n(x) \leq x$

b) Etudier la continuité de f_n en 2

3) **a)** Montrer que, pour tout entier ≥ 2 , l'equation $f_n(x) = 0$ admet dans $]1\,,2[$ une unique solution U_n.

b) Vérifier que $f_n(U_{n+1}) = \frac{1}{4}(U_n - 2)$

c) Montrer que la suite (U_n) est croissante puis qu'elle est convergente.

4) **a)** Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$; on a : $U_n = \frac{2n}{n+U_n^2}$

b) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 2$

5) La courbe C_g ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction g définie sur ´ $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

* $\Delta:\ y = x - 1$ est une asymptote à Cg au voisinage de $+\infty$.

* $\Delta':\ y = -1$ est une asymptote à Cg au voisinage de $-\infty$.

* $D:\ x = 2$ est une asymptote verticale à C_g

a) Par lecture graphique, déterminer :

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} (g(x) - x)$ et $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$

b) Déterminer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to-\infty} g\,o\,f_n(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \left[g(-f_n(x)) + f_n(x)\right]$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{g(-f_n(x))}{x}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} g(U_n)$