

Dans tous les exercices le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{1}{2 - \cos x}$

1) Montrer que pour tout réel x : $\frac{1}{3} \leq f(x) \leq 1$

2) En déduire les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x(2 - \cos x)}$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1}{2 - \cos x}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+1}{x^2(2 - \cos x)}$

Exercice 2

Soit f la fonction définie par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{(1 - \cos x) \sin 2x}{x^3} & \text{si } x < 0 \\ f(x) = x^2 + 3x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue en 0.

2) Montrer que f est continue sur \mathbb{R} .

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = 3x + 2 \sin x$

1) a) Montrer que pour tout réel x : $3x - 2 \leq f(x) \leq 3x + 2$

b) En déduire les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2) Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par :
$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{f(x)} & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{1}{5} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

a) Montrer que g est continue en 0

b) Montrer que pour tout $x \in \left] \frac{2}{3}, +\infty \right[$ on a : $\frac{x}{3x+2} \leq g(x) \leq \frac{x}{3x-2}$

c) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu

Exercice 4

Soit f la fonction définie par :
$$\begin{cases} f(x) = x + 1 - \sqrt{x^2 + 1} & \text{si } x \geq 0 \\ f(x) = \frac{\sin x^2}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue en 0.

2) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu

3) Montrer que $\forall x < 0$ on a : $\frac{1}{x} \leq f(x) \leq -\frac{1}{x}$ puis calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu

Exercice 5

Soit f la fonction définie par :
$$\begin{cases} f(x) = x^2 - \sqrt{1-x} & \text{si } x < 1 \\ f(x) = x^2 + \sin(\pi x^2) & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

- 1) Montrer que f est continue sur \mathbb{R} .
- 2) a) Montrer que $\forall x \geq 1$ on a : $x^2 - 1 \leq f(x) \leq x^2 + 1$
b) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
c) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu
- 3) a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
b) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1+\sqrt{x} \cos x}{x+1} & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{x^2}{2(\sqrt{x^2+1}-1)} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$
 et soit C_f sa courbe représentative

- 1) a) Vérifier que pour tout $x \geq 0$ on a : $\frac{1-\sqrt{x}}{x+1} \leq f(x) \leq \frac{1+\sqrt{x}}{x+1}$
b) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu
- 2) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(f(x) + \frac{1}{2}x \right)$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu
- 3) Montrer que f est continue sur \mathbb{R}
- 4) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f \circ f(x)$
- 5) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution α dans l'intervalle $\left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$
b) Montrer que $\tan \alpha = -\sqrt{\alpha} - 1$
- 6) Soit g la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2} \right]$ par
$$g(x) = \begin{cases} f\left(\frac{1}{\cos x}\right) & \text{si } x \neq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{si } x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Montrer que g est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2} \right]$

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :
$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{4x^2+1} + 2x & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = 1 + x^2 \sin\left(\frac{\pi}{2x}\right) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- 1) Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ et interpréter le résultat graphiquement
- 2) a) Montrer que pour tout réel $x > 0$ on a : $-x^2 + 1 \leq f(x) \leq x^2 + 1$
b) En déduire $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-1}{x}$
- 3) Montrer que f est continue sur \mathbb{R} .

4) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)-1}{x}$

5) a) Montrer que l'équation $f(x) = 5$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[1, 3]$

b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{\pi}{2}$

Exercice 8

Soit f la fonction définie par :
$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{3x^2 + x + 2} & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = \frac{2\sqrt{1-\cos x}}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1) a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

b) Montrer que pour $x > 0$ on a : $0 \leq f(x) \leq \frac{2\sqrt{2}}{x}$ et en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2) Montrer que f est continue sur \mathbb{R}

Exercice 9

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x \left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) \right)$

1) a) Montrer que f est continue sur $]0; +\infty[$

b) La fonction f est elle prolongeable par continuité à droite en 0 ?

2) a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

b) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x)$ et interpréter graphiquement ce résultat

3) a) Montrer que f est strictement croissante sur $[1; +\infty[$

b) Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α dans $[1; +\infty[$ et Vérifier que $\alpha \in]1; 2[$

c) Montrer que $\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right) = \frac{\sqrt{2\alpha-1}}{\alpha}$

Exercice 10

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ dont la courbe représentative C est donnée ci-contre

La droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote à C au voisinage de $-\infty$ et au voisinage de $+\infty$

La droite d'équation $x = 1$ est asymptote à C

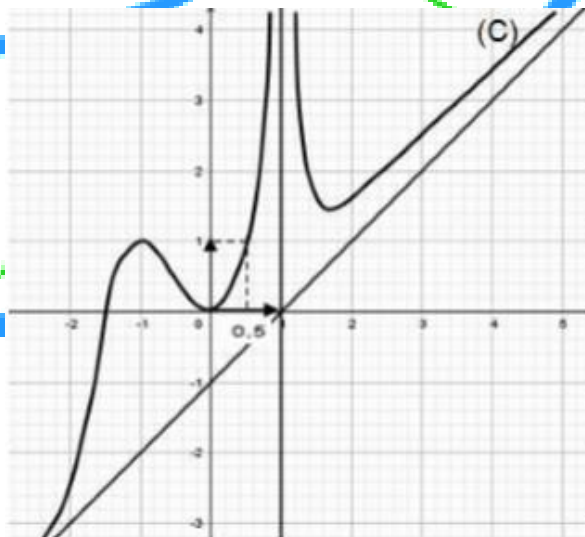
1) Par une lecture graphique déterminer

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2) a) Déterminer les limites suivantes

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{f(x)}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-f(x)-1}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x^2)$

b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos f(x)-2}{f(x)} = 0$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x))^2 \left(\cos\left(\frac{1}{f(x)}\right) - 1 \right) = -\frac{1}{2}$



3) Soit la fonction g définie par $g(x) = (f \circ f)(x)$ on note C_g sa courbe représentative

a) Déterminer le domaine de définition de g

b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = 1$

c) En déduire que C_g admet une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ que l'on déterminera

b) Montrer que la fonction g est strictement décroissante sur $]-1, 0]$

4) Soit n un entier naturel non nul

Justifier que l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet dans $[-1, 1]$ exactement deux solutions α_n et β_n tels que $\alpha_n \in]-1, 0]$ et $\beta_n \in]0, 1[$

Exercice 11

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{\frac{x^2}{x+1}}$

1) Préciser le domaine de définition de f .

2) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter les résultats graphiquement

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x$

3) Montrer que f est continue sur $]-1, +\infty[$.

Exercice 12

On a représenté ci-contre la courbe C_f d'une fonction f .

Les droites d'équations $y = x$, $y = -x + 2$ et $x = 3$ sont des asymptotes à C_f

1) a) Déterminer les limites suivantes :

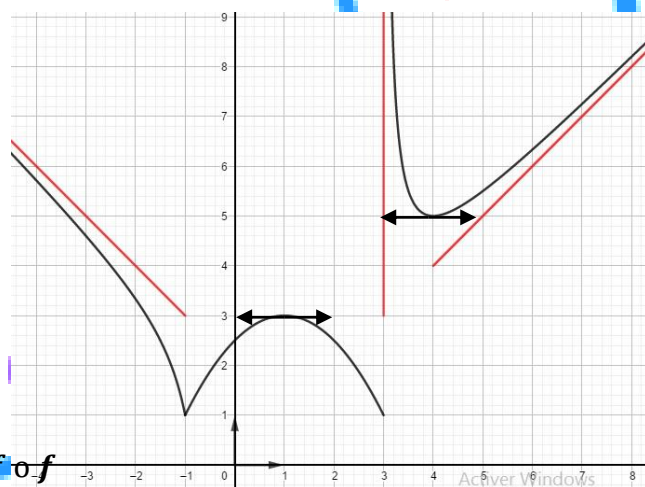
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x^2$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \sin\left(\frac{\pi}{f(x)}\right)$

b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(f \circ f)(x)}{x} = -1$

c) Montrer alors que la représentation graphique de $f \circ f$

admet une asymptote oblique au voisinage de $-\infty$ que l'on déterminera

2) Montrer que la fonction $f \circ f$ est strictement croissante sur $[1, 3]$



Exercice 13

Soit f la fonction définie par :
$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2 - 3x} & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = \frac{3}{2}x^2 + \sin x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$
 et soit C_f sa courbe représentative

1) Etudier la continuité de f en 0.

2) Montrer que f est continue sur $]-\infty, 0[$

3) On pose $\forall x > 0$ $u(x) = x^2$ et $v(x) = \sin(x^2)$.

a) Ecrire v sous la forme d'une fonction composée.

b) En déduire que f est continue sur $]0, +\infty[$

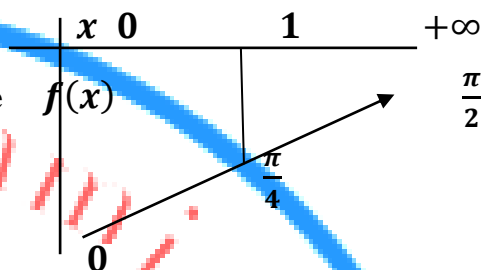
4) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

b) Etudier la branche infinie de C_f au voisinage de $-\infty$

5) a) Montrer que $\forall x > 0$ on a : $f(x) \geq \frac{3}{2}x^2 - 1$ et en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Exercice 14

On considère la fonction f définie, continue sur \mathbb{R} dont le tableau de variation est donné ci-contre et soit C_f sa courbe représentative



* la fonction f est impaire

* Pour tout réel $x > 0$ on a : $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$ (1)

* Pour tout réel $x > 0$ on a : $x - \frac{x^3}{3} \leq f(x) \leq x$ (2)

1) a) Montrer que la courbe C_f admet deux asymptotes dont on précisera les équations

b) Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{x+1}$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]0, 1[$

2) On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par : $\begin{cases} g(x) = x^2 \left(f\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} \right) & \text{si } x \neq 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$

Montrer que la fonction g est impaire

3) a) On utilisant la propriété (2), montrer que pour tout réel $x > 0$ on a : $-\frac{1}{3x} \leq g(x) \leq 0$

b) Calculer alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et déduire $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$

c) Interpréter les résultats graphiquement

4) a) Montrer que pour tout réel $x > 0$ on a : $g(x) = x^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} - f(x) \right)$

b) En déduire que g est continue en 0

Exercice 15

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x} \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}{x-1} & \text{si } x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[\\ f(x) = \sqrt{x^2 - 2x} + x & \text{si } x \in]-\infty, 0] \end{cases}$

1) a) Montrer que : $\forall x \in]0, 1[$ on a : $\frac{\sqrt{x}}{x-1} \leq f(x) \leq -\frac{\sqrt{x}}{x-1}$

b) Montrer que f est continue en 0.

c) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ Interpréter ce résultat graphiquement

2) Soit les fonctions u, v et w définies sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ par

$$u(x) = \frac{\pi(x-1)}{x} \quad v(x) = \frac{\sin x}{x} \quad \text{et} \quad w(x) = \frac{\pi}{\sqrt{x}}$$

a) Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ on a : $f(x) = w(x) \times (v \circ u)(x)$

b) En déduire que f admet un prolongement par continuité en 1

Exercice 16

La courbe ci-contre est celle d'une fonction f définie et continue sur \mathbb{R}^* . Les droites d'équations : $y = 1$, $x = 0$ et $y = x - 2$ sont des asymptotes à C_f .

1) Par une lecture graphique déterminer

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{f(x) - x + 2} ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x) - 1} \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x - f(x))$$

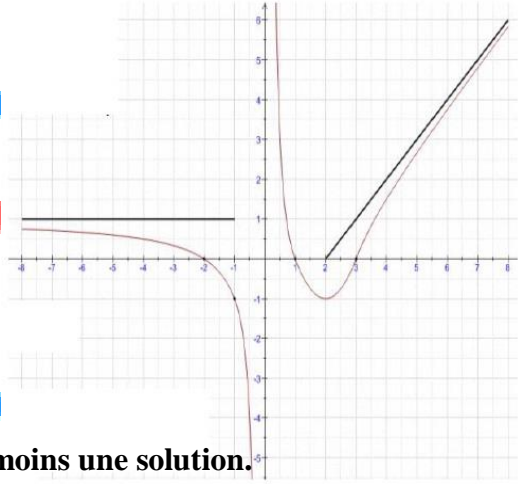
2) a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f \circ f$.

b) Résoudre graphiquement l'inéquation : $(f \circ f)(x) \leq -1$

3) Soit la fonction g définie par : $g(x) = \begin{cases} f\left(\frac{-x}{\sin x}\right) & \text{si } x \in]0, \pi[\\ -1 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x = \pi \end{cases}$

a) Montrer que g est continue sur $[0, \pi]$.

b) Montrer que l'équation $g(x) = x - 2$ admet dans $[0, \pi]$ au moins une solution.



Exercice 17

On considère deux fonctions f et g définies par leurs courbes C_f et C_g ci-dessous représentées.

La fonction f est définie sur $]-\infty, -1]$

et la fonction g est définie sur $]2, 4]$.

La droite d'équation $y = 2$ est une asymptote

à C_f au voisinage de $-\infty$ et la droite

d'équation $x = 2$ est une asymptote à C_g

1) Donner graphiquement : $f(-1)$ $f(-2)$

$g(3)$ $g(4)$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x)$

2) Déterminer $(g \circ f)([-2, -1])$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} (g \circ f)(x)$.

3) a) Montrer que pour tout réels a et b tel que $a < b \leq -1$ on a : $(g \circ f)(a) > (g \circ f)(b)$

b) En déduire le sens de variation de $g \circ f$ sur $]-\infty, -1]$.

4) Montrer que l'équation $(g \circ f)(x) = \frac{1}{2}$ admet une solution unique α dans $]-2, -1[$

Exercice 18

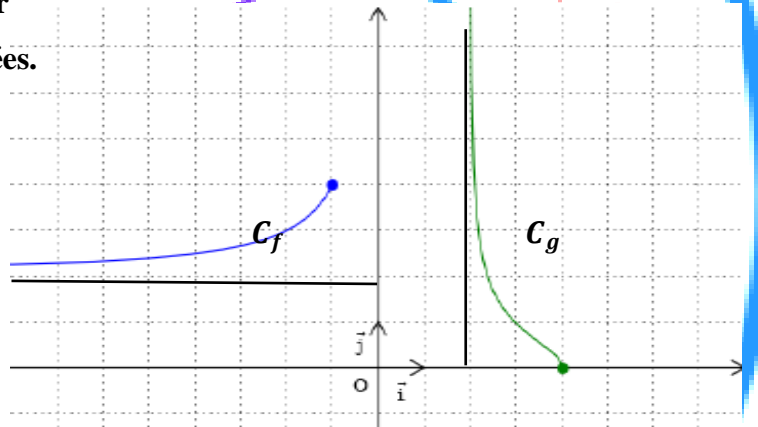
On considère deux fonctions f et g définies par leurs courbes C_f et C_g ci-dessous représentées telles que

* la fonction f est continue sur $]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$

* la fonction f est paire

* la droite d'équation $y = x - 4$ est une asymptote

à C_f au voisinage de $+\infty$



- * la courbe C_f passe par les points $(2, 1)$ et $(4, 2)$
- * la fonction g est impaire
- * la courbe C_g admet deux asymptotes l'une d'équation $y = 4$ au voisinage de $+\infty$ et l'autre d'équation au voisinage de $y = -4$ au voisinage de $-\infty$
- * la courbe C_g passe par le point $(1, 2)$

1) a) Déterminer le domaine de continuité de $f \circ g$

b) Etudier la parité de $f \circ g$

2) Déterminer les limites suivantes

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x^2)}{x^4 \left(1 - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)}, \lim_{x \rightarrow +\infty} (g \circ f)(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} (f \circ f)(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(f \circ f)(x)}{x}, \lim_{n \rightarrow +\infty} f(2(-1)^n), n \in \mathbb{N}$$

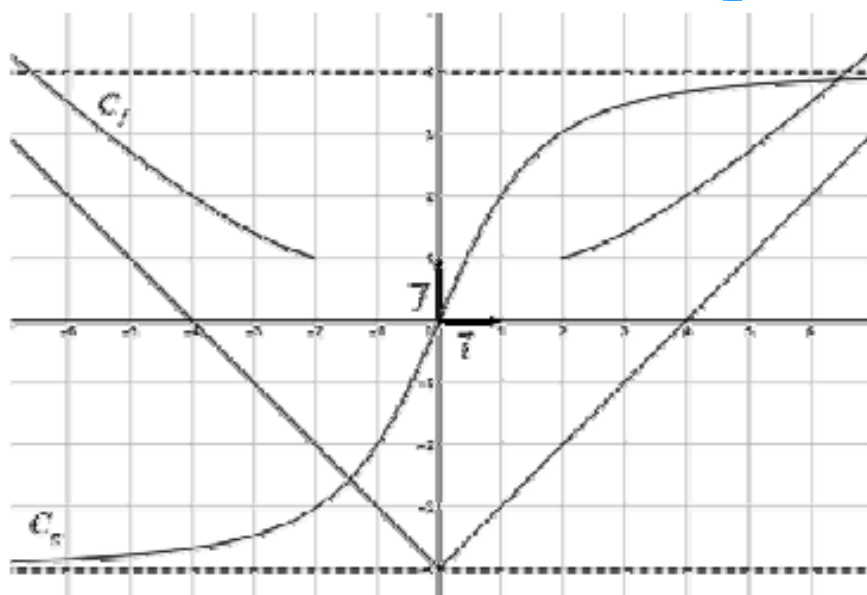
3) Montrer que la représentation graphique de $f \circ f$ admet une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ que l'on déterminera

4) a) Etudier les variations de $f \circ g$ sur $[1, +\infty[$

b) En Montrer que l'équation $(f \circ g)(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$ admet une unique solution α dans $]1, +\infty[$

c) En déduire que l'équation $(f \circ g)(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$ admet exactement deux solutions

dans $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$



Exercice 19

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par
$$\begin{cases} \frac{x + \cos(\pi x)}{x - 1} & \text{si } x < 1 \\ \sqrt{x^2 + x + 2} - x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

1) a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$ et interpréter le résultat graphiquement

b) Montrer que pour tout $x < 1$ on a : $\frac{x+1}{x-1} \leq f(x) \leq 1$

c) En déduire $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

2) a) Montrer que pour tout $x < 1$ on a : $\frac{1+\cos(\pi x)}{x-1} = \frac{1-\cos(\pi(x-1))}{x-1}$

b) En déduire $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ (On pourra poser $U(x) = \pi(x - 1)$)

c) Montrer que f est continue en 1

3) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution α dans $]-\frac{1}{2}, 0[$

b) Montrer que $\sin(\pi\alpha) = -\sqrt{1 - \alpha^2}$

4) On donne ci-dessous la courbe C_g représentation graphique d'une fonction g continue sur $]-\infty, 2[$

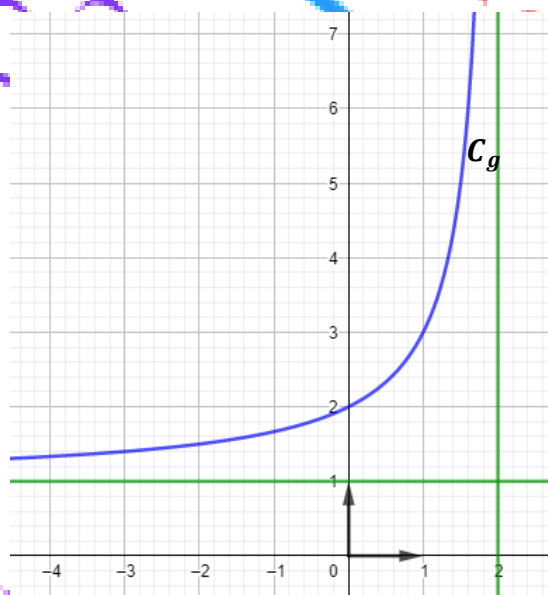
Les droites d'équation $x = 2$ et $y = 1$ sont les asymptotes à C_g

a) Déterminer les limites suivantes :

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (g \circ f)(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f \circ g)(x)$

b) Soit la fonction h définie sur $]-\infty, 2[$ par : $h(x) = \begin{cases} (f \circ g)(x) & \text{si } x < 2 \\ h(2) = \frac{1}{2} \end{cases}$

Montrer que h est continue sur $]-\infty, 2[$



Exercice 20

Pour tout entier ≥ 2 , on définit la fonction f_n sur \mathbb{R} par :

$$\begin{cases} f_n(x) = 2 + (x - 2) \sin\left(\frac{1}{x-2}\right) & \text{si } x > 2 \\ f_n(x) = \frac{1}{4}(x^3 + nx - 2n) & \text{si } x \leq 2 \end{cases}$$

On désigne par C_n la représentation graphique de f_n dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f_n(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat graphiquement

b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 3$. Interpréter graphiquement le résultat graphiquement

2) a) Montrer que pour tout $x > 2$; on a : $4 - x \leq f_n(x) \leq x$

b) Etudier la continuité de f_n en 2

3) a) Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet dans $]1, 2[$ une unique solution U_n .

b) Vérifier que $f_n(U_{n+1}) = \frac{1}{4}(U_n - 2)$

c) Montrer que la suite (U_n) est croissante puis qu'elle est convergente.

4) a) Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$; on a : $U_n = \frac{2n}{n+U_n^2}$

b) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 2$

5) La courbe C_g ci-contre est la représentation graphique d'une fonction g définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

* $\Delta: y = x - 1$ est une asymptote à C_g au voisinage de $+\infty$.

* $\Delta': y = -1$ est une asymptote à C_g au voisinage de $-\infty$.

* $D: x = 2$ est une asymptote verticale à C_g

a) Par lecture graphique, déterminer :

$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - x)$ et $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$

b) Déterminer les limites suivantes :

$\lim_{x \rightarrow -\infty} g \circ f_n(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} [g(-f_n(x)) + f_n(x)]$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(-f_n(x))}{x}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(U_n)$

