Dans tous les exercices le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{2-\cos x}$

1) Montrer que pour tout réel x : $\frac{1}{3} \leq f(x) \leq 1$

2) En déduire les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x(2-\cos x)}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{2-\cos x}$ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2+1}{x^2(2-\cos x)}$

Exercice 2

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{(1-\cos x)\sin 2x}{x^3} & \text{si } x < 0 \\ f(x) = x^2 + 3x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

1) Montrer que f est continue en 0.

2) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3x + 2\sin x$

1) **a)** Montrer que pour tout réel x : $3x - 2 \leq f(x) \leq 3x + 2$

b) En déduire les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \begin{cases} \frac{x}{f(x)} & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{1}{5} & \text{si } x = 0 \end{cases}$

a) Montrer que g est continue en 0

b) Montrer que pour tout $x \in \left]\frac{2}{3}, +\infty\right[$ on a : $\frac{x}{3x+2} \leq g(x) \leq \frac{x}{3x-2}$

c) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et interpréter graphiquement le résultat obtenue

Exercice 4

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = x + 1 - \sqrt{x^2+1} & \text{si } x \geq 0 \\ f(x) = \frac{\sin x^2}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

1) Montrer que f est continue en 0.

2) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat obtenue

3) Montrer que $\forall x < 0$ on a : $\frac{1}{x} \leq f(x) \leq -\frac{1}{x}$ puis calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat obtenue

Exercice 5

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = x^2 - \sqrt{1-x} & \text{si } x < 1 \\ f(x) = x^2 + \sin(\pi x^2) & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2) **a)** Montrer que $\forall x \geq 1$ on a : $x^2 - 1 \leq f(x) \leq x^2 + 1$

b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat obtenue

3) **a)** Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat obtenue

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \sqrt{4x^2+1} + 2x & si \ \ x \leq 0 \\ f(x) = 1 + x^2 \sin\left(\frac{\pi}{2x}\right) & si \ \ x > 0 \end{cases}$

1) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ et interpréter le résultat graphiquement

2) **a)** Montrer que pour tout réel $x > 0$ on a : $-x^2 + 1 \leq f(x) \leq x^2 + 1$

b) En déduire $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{f(x)-1}{x}$

3) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

4) Déterminer $\lim\limits_{x\to0^-} \frac{f(x)-1}{x}$

5) **a)** Montrer que l'équation $f(x) = 5$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[1\,,3]$

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{\pi}{2}$

Exercice 7

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \sqrt{3x^2+x+2} & \text{si } \ x \leq 0 \\ f(x) = \frac{2\sqrt{1-\cos x}}{x} & \text{si } \ x > 0 \end{cases}$

1) **a)** Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

b) Montrer que pour $x > 0$ on a : $0 \leq f(x) \leq \frac{2\sqrt{2}}{x}$ et en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$

Exercice 8

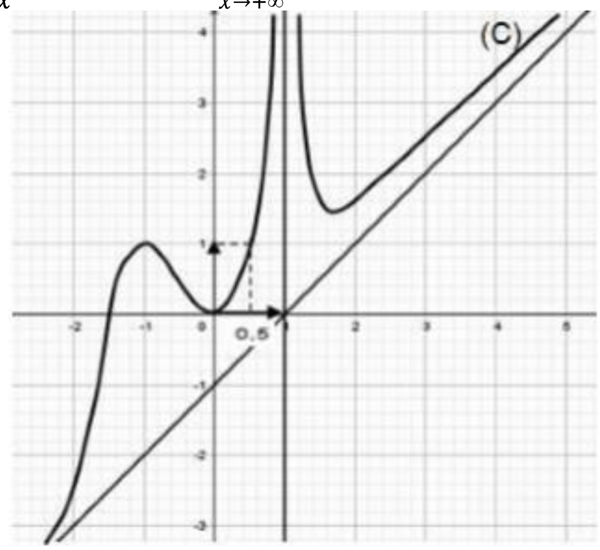
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ dont la courbe représentative C est donnée ci-contre

La droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote à C au voisinage de $-\infty$ et au voisinage de $+\infty$

La droite d'équation $x = 1$ est asymptote à C

1) Par une lecture graphique déterminer

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to1} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$



2) **a)** Déterminer les limites suivantes

. $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{f(x)}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x - f(x) - 1}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x^2)$

b) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\cos f(x) - 2}{f(x)} = 0$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x))^2 \left(\cos\left(\frac{1}{f(x)}\right) - 1\right) = -\frac{1}{2}$

3) Soit la fonction g définie par $g(x) = (f \text{ o } f)(x)$ on note C_g sa courbe représentative

a) Déterminer le domaine de définition de g

b) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = 1$

c) En déduire que C_g admet une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ que l'on déterminera

b) Montrer que la fonction g est strictement décroissante sur $]-1\,,0]$

4) Soit n un entier naturel non nul

a) Justifier que l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet dans $[-1\,,1]$ exactement deux solutions α_n et β_n tels que $\alpha_n \in]-1\,,0]$ et $\beta_n \in]0\,,1[$

b) Montrer que α_n et β_n sont deux suites adjacentes

<u>Exercice 9</u>

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{\frac{x^2}{x+1}}$

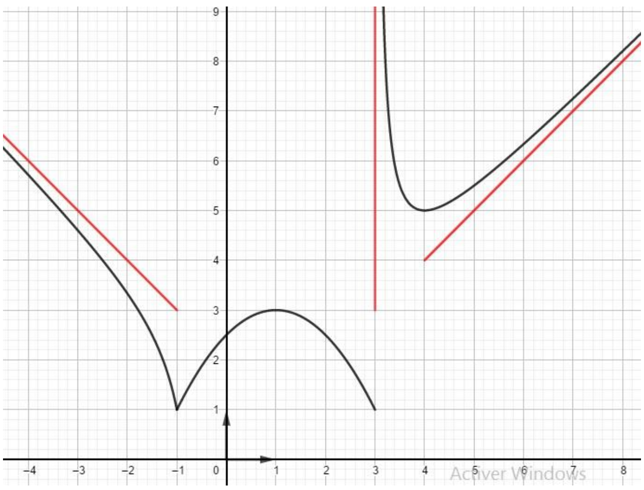
1) Préciser le domaine de définition de f.

2) **a)** Calculer $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter les résultats graphiquement

b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x$

3) Montrer que f est continue sur $]-1\,,+\infty[$.

<u>Exercice 10</u>



On a représenté ci-contre la courbe C_f d'une fonction f.

Les droites d'équations $y = x$, $y = -x + 2$ et $x = 3$ sont des asymptotes à C_f

1) **a)** Déterminer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x^2$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) \sin\left(\frac{\pi}{f(x)}\right)$

b) Montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{(f \text{ o } f)(x)}{x} = -1$

c) Montrer alors que la représentation graphique de f o f admet une asymptote oblique au voisinage de $-\infty$ que l'on déterminera

2) Montrer que la fonction f o f est strictement croissante sur $[1\,,3]$

<u>Exercice 11</u>

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2 - 3x} & \text{si } \; x \leq 0 \\ f(x) = \frac{3}{2}x^2 + \sin x^2 & \text{si } \; x > 0 \end{cases}$ et soit C_f sa courbe représentative

1) Etudier la continuité de f en 0.

2) Montrer que f est continue sur $]-\infty\,,0[$

3) On pose $\forall x > 0\ \ u(x) = x^2$ et $v(x) = \sin(x^2)$.

a) Ecrire v sous la forme d'une fonction composée.

b) En déduire que f est continue sur $]0\,,+\infty[$

4) **a)** Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

b) Etudier la branche infinie de C_f au voisinage de $-\infty$

5) a) Montrer que $\forall x > 0$ on a : $f(x) \geq \frac{3}{2}x^2 - 1$ et en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Exercice 12

On considère la fonction f définie, continue sur $\mathbb{R}$ dont le tableau de variation est donné ci-contre et soit C_f sa courbe représentative

x	0	1	$+\infty$
$f(x)$	0 ↗	$\frac{\pi}{4}$ ↗	$\frac{\pi}{2}$

* la fonction f est impaire

* Pour tout réel $x > 0$ on a : $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$ $\quad(\mathbf{1})$

* Pour tout réel $x > 0$ on a : $x - \frac{x^3}{3} \leq f(x) \leq x$ $\quad(\mathbf{2})$

1) **a)** Montrer que la courbe C_f admet deux asymptotes dont on précisera les équations

b) Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{x+1}$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]0\,,1[$

2) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} g(x) = x^2\left(f\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right) & si\ \ x \neq 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$

Montrer que la fonction g est impaire

3) **a)** On utilisant la propriété $(\mathbf{2})$, montrer que pour tout réel $x > 0$ on a : $-\frac{1}{3x} \leq g(x) \leq 0$

b) Calculer alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$

c) Interpréter les résultats graphiquement

4) **a)** Montrer que pour tout réel $x > 0$ on a : $g(x) = x^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} - f(x)\right)$

b) En déduire que g est continue en 0

Exercice 13

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{x}\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}{x-1} & \text{si } x \in]0\,,1[\,\cup\,]1\,,+\infty[\\ f(x) = \sqrt{x^2 - 2x} + x & \text{si } x \in]-\infty\,,0] \end{cases}$

1) **a)** Montrer que : $\forall x \in]0\,,1[$ on a : $\frac{\sqrt{x}}{x-1} \leq f(x) \leq -\frac{\sqrt{x}}{x-1}$

b) Montrer que f est continue en 0.

c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ Interpréter ce résultat graphiquement

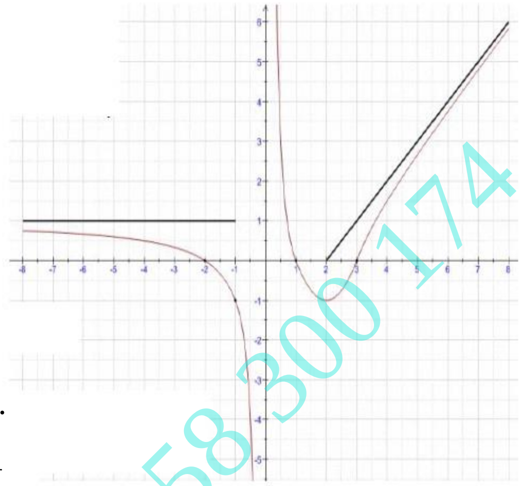
2) Soit les fonctions u, v et w définies sur $\mathbb{R}_+^*\backslash\{1\}$ par

$$u(x) = \frac{\pi(x-1)}{x} \qquad v(x) = \frac{\sin x}{x} \quad et \quad w(x) = \frac{\pi}{\sqrt{x}}$$

a) Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*\backslash\{1\}$ on a : $f(x) = w(x) \times (v \text{ o } u)(x)$

b) En déduire que f admet un prolongement par continuité en 1

Exercice 14



La courbe ci-contre est celle d'une fonction f définie et continue sur $\mathbb{R}^*$. Les droites d'équations : $y = 1$, $x = 0$ et $y = x - 2$ sont des asymptotes à C_f.

1) Par une lecture graphique déterminer

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{f(x) - x + 2} \ ; \ \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{f(x) - 1} \ \text{ et } \ \lim_{x\to+\infty} f(x - f(x))$$

2) **a)** Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f o f.

b) Résoudre graphiquement l'inéquation : $(f \text{ o } f)(x) \leq -1$

3) Soit la fonction g définie par : $g(x) = \begin{cases} f\left(\frac{-x}{\sin x}\right) & si \ \ x \in]0\,,\pi[\\ -1 & si \quad x = 0 \\ 1 & si \quad x = \pi \end{cases}$

a) Montrer que g est continue sur $[0\,,\pi]$.

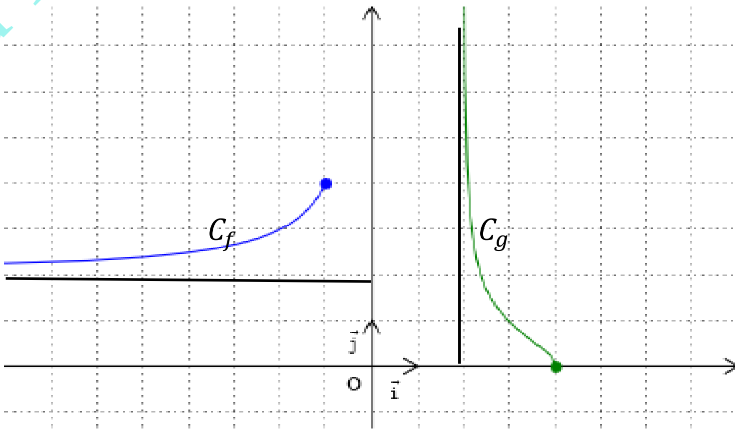
b) Montrer que l'équation $g(x) = x - 2$ admet dans $[0\,,\pi]$ au moins une solution.

Exercice 15

On considère deux fonctions f et g définies par leurs courbes C_f et C_g ci- dessous représentées.

La fonction f est définie sur $]-\infty\,,-1]$ et la fonction g est définie sur $]2\,,4]$.

La droite d'équation $y = 2$ est une asymptote à C_f au voisinage de $-\infty$ et la droite d'équation $x = 2$ est une asymptote à C_g



1) Donner graphiquement : $f(-1)$ $f(-2)$ $g(3)$ $g(4)$ $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ $\lim_{x\to2^+} g(x)$

2) Déterminer $(g \text{ o } f)([-2\,,-1])$ $\lim_{x\to-\infty} (g \text{ o } f)(x)$.

3) **a)** Montrer que pour tout réels a et b tel que $a < b \leq -1$ on a : $(g \text{ o } f)(a) > (g \text{ o } f)(b)$

b) En déduire le sens de variation de g o f sur $]-\infty\,,-1]$.

4) Montrer que l'équation $(g \text{ o } f)(x) = \frac{1}{2}$ admet une solution unique α dans $]-2\,,-1[$

Exercice 16

On considère deux fonctions f et g définies par leurs courbes C_f et C_g ci- dessous représentées telles que

* la fonction f est continue sur $]-\infty\,,-2[\,\cup\,]2\,,+\infty[$

* la fonction f est paire

* la droite d'équation $y = x - 4$ est une asymptote

à C_f au voisinage de $+\infty$

* la courbe C_f passe par les points $(2\,,1)$ et $(4\,,2)$

* la fonction g est impaire

* la courbe C_g admet deux asymptotes l'une d'équation $y = 4$ au voisinage de $+\infty$ et l'autre d'équation au voisinage de $y = -4$ au voisinage de $-\infty$

* la courbe C_g passe par le point $(1\,,2)$

1) **a)** Déterminer le domaine de continuité de f o g

b) Etudier la parité de f o g

2) Déterminer les limites suivantes

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x^2)}{x^4\left(1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)}\,,\ \lim_{x\to+\infty}(g\ \mathrm{o}\ f)(x),\ \lim_{x\to+\infty}(f\ \mathrm{o}\ f\ )(x)\,,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{(f\ \mathrm{o}\ f)(x)}{x}\,,\ \lim_{n\to+\infty} f(2(-1)^n)\,, n\in IN$$

3) Montrer que la représentation graphique de f o f admet une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ que l'on déterminera

4) **a)** Etudier les variations de f o g sur $[1\,,+\infty[$

b) En Montrer que l'équation $(f\ \mathrm{o}\ g)(x) = \frac{1}{x^2-1}$ admet une unique solution α dans $]1\,,+\infty[$

c) En déduire que l'équation $(f\ \mathrm{o}\ g)(x) = \frac{1}{x^2-1}$ admet exactement deux solutions

dans $]-\infty\,,-1[\,\cup\,]1\,,+\infty[$