Coniques 4ème Mathématiques

Dans tous les exercices le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Exercice 1

On considère la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $x^2 + 4x + 8y - 4 = 0$.

1) Montrer que $\mathcal{C}$ est une parabole et préciser son paramètre.

2) Déterminer, relativement au repère $R = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$; les coordonnées de son centre S ; de son foyer F et une équation de sa directrice D.

3) **a)** Vérifier que $A\left(0, \frac{1}{2}\right)$ est un point de $\mathcal{C}$.

b) Déterminer, relativement au repère R ; une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ en A

c) Tracer la parabole $\mathcal{C}$ et sa tangente T.

Exercice 2

Soit $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $x^2 + y^2 - 14xy + 24 = 0$.

1) On considère les vecteurs $\vec{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\imath} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\jmath}$ et $\vec{v} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\imath} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\jmath}$. Montrer que $R' = (O, \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormé du plan.

2) Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{C}$ dans le repère R'.

3) En déduire la nature de $\mathcal{C}$.

Exercice 3

Soit la courbe $\mathcal{P}$ d'équation : $y^2 + 2y - 6x + 10 = 0$.

1) Montrer que $\mathcal{P}$ est une parabole.

2) Déterminer son sommet, son foyer et sa directrice.

3) **a)** Montrer que le point $A(3, 2) \in \mathcal{P}$.

b) Donner une équation de la tangente T à $\mathcal{P}$ en A.

4) Tracer la parabole $\mathcal{P}$.

Exercice 4

Soit u un nombre complexe.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - (2u - i\bar{u})z - 2iu\bar{u} = 0$. On désignera par z' et z'' ses solutions.

2) On désigne par A, M, M' et M'' les points d'affixes respectives $2i$, u, z' et z''. Soit $\mathcal{H}$ l'ensemble des points M du plan tels que A, M' et M'' soient alignés.

a) Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{H}$.

b) Montrer que $\mathscr{H}$ est une hyperbole dont-on précisera le centre, les sommets, les foyers, l'excentricité, les directrices et les asymptotes.

3) **a)** Vérifier que $\mathscr{H}$ passe par le point O et donner une équation de la tangente T à en O.

b) Tracer $\mathscr{H}$.

Exercice 5

1) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application f qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = \frac{1}{4}\left(1 - i\sqrt{3}\right)z$.

2) On considère la courbe $\mathscr{C}$ d'équation : $15x^2 + 13y^2 - 2\sqrt{3}xy - 768 = 0$.

a) Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{C}$' image de $\mathscr{C}$ par f.

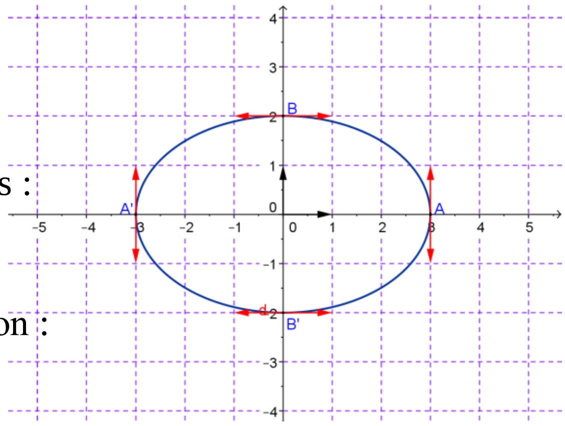
b) En déduire que $\mathscr{C}$' est une ellipse dont-on précisera les sommets, les foyers les directrices et l'excentricité

c) Construire $\mathscr{C}$' et $\mathscr{C}$.

Exercice 6

Pour chacune des questions suivantes une seule des réponses proposées est exacte.

1) La courbe représentée ci-contre admet pour équation :



a) $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ **b)** $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ **c)** $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

2) Un des foyers de l'ellipse est le point F de coordonnées :

a) $F\left(0\,,\sqrt{13}\right)$ **b)** $F\left(\sqrt{13}\,,0\right)$ **c)** $F\left(\sqrt{5}\,,0\right)$

3) Une des directrice de l'ellipse est la droite $\mathscr{D}$ d'équation :

a) $x = \frac{4}{\sqrt{13}}$ **b)** $y = \frac{4}{9}$ **c)** $x = \frac{9}{\sqrt{5}}$

4) La parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y^2 = -4x$ a pour foyer F de coordonnées :

a) $F(2\,,0)$ **b)** $F(0\,,1)$ **c)** $F(-1\,,0)$

5) La parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y^2 = -6x$ a pour paramètre :

a) $p = -3$ **b)** $p = 3$ **c)** $p = 6$

Exercice 7

On considère les points $A(1\,,0)$, $B\left(-1\,,\sqrt{3}\right)$, $B'\left(-1\,,-\sqrt{3}\right)$ et $\Omega\ (-1\,,0)$. Soit $\mathscr{E}$ l'ellipse de centre Ω passant par A et de sommets secondaires B et B'.

1) Montrer que A est un sommet principal de $\mathcal{E}$.

2) Déterminer les foyers F et F', l'excentricité et les directrices associées $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}$' de $\mathcal{E}$.

3) Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.

4) Déterminer les points M_1 et M_2 intersection de $\mathcal{P}$ et l'axe des ordonnées, M_1 étant le point d'ordonnée négative.

5) Ecrire une équation de la tangente T à $\mathcal{E}$ en M_1

6) Tracer $\mathcal{P}$,

Exercice 8

1) Déterminer une équation cartésienne de la parabole $\mathcal{P}$ de foyer $F\left(\frac{5}{4}, 1\right)$ et de directrice D : $x = \frac{11}{4}$

2) Vérifier que le point $A(-1, -2)$ est un point de $\mathcal{P}$ et donner équation de la tangente T à $\mathcal{P}$ en A.

3) Construire la parabole $\mathcal{P}$.

Exercice 9

Soit l'application f du plan complexe dans lui-même qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que $z' = 2z - z^2$.

1) Soient les points M_1 et M_2 d'affixes respectives z^2 et $2z$ où $z \in \mathbb{C}$.

Montrer que OM_1M_2M' est un parallélogramme.

2) Soit $\mathcal{H}$ l'ensemble des points $M(z)$ tel que z' soit imaginaire pur.

Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{H}$.

3) **a)** Montrer que $\mathcal{H}$ est une hyperbole passant par O.

b) Ecrire une équation de la tangente T à $\mathcal{H}$ en O.

c) Tracer T à $\mathcal{H}$.

Exercice 10

On considère la courbe Γ d'équation $y = \frac{2x-1}{x+3}$

1) Montrer que $M(x, y) \in \Gamma \Leftrightarrow (y-2)(x+3) = -7$.

2) **a)** Soit le point $O'(-3, 2)$. Vérifier qu'une équation de Γ dans le repère $R' = (O', \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est $XY = -7$.

b) En déduire que Γ est une hyperbole de centre O'.

Exercice 11

On considère l'hyperbole $\mathcal{H}$ d'équation : $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ et soit le point $M\left(\frac{1}{\cos\alpha} ; 2\tan\alpha\right)$; $\alpha \in \left]0 ; \frac{\pi}{2}\right[$.

1) **a)** Déterminer, par leurs coordonnées les sommets et les foyers de $\mathcal{H}$.

b) Donner les équations cartésiennes des deux asymptotes Δ_1 et Δ_2 de $\mathcal{H}$.

c) Tracer $\mathcal{H}$.

d) Vérifier que le point $M \in \mathcal{H}$.

2) Soit T_M la tangente à $\mathcal{H}$ en M. Montrer qu'une équation de T_M est : $2x - y\sin\alpha - 2\cos\alpha = 0$.

3) On désigne par P_1 et P_2 les points d'intersection de T_M respectivement avec les droites Δ_1 et Δ_2

Donner les coordonnées des points P_1 et P_2

Exercice 12

Soit la droite $\mathcal{D} : x = \frac{5}{2}$ et les points $M(x, y)$ et $F\left(\frac{3}{2}, -1\right)$ et le point H projeté orthogonal de M sur la droite $\mathcal{D}$. Soit $\mathcal{P} : \{M \in P \text{ tel que } MH = MF\}$.

1) **a)** Montrer que $\mathcal{P}$ est une parabole dont-on déterminera le sommet, l'axe focal, le foyer, et la directrice.

b) Construire $\mathcal{P}$.

2) Soit A le point de $\mathcal{P}$ d'abscisse $-\frac{5}{2}$ et d'ordonnée y_0 positive.

a) Déterminer A.

b) Déterminer une équation cartésienne de la tangente T à $\mathcal{P}$ en A.

c) Donner une équation de la droite T' perpendiculaire à T en A.

3) Les droite T et T' coupent l'axe focal de $\mathcal{P}$ respectivement en I et en J.

a) Montrer que F est le milieu du segment $[IJ]$.

b) Soit K le projeté orthogonal de A sur l'axe focal de $\mathcal{P}$, montrer que $JK = 1$

Exercice 13

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - (3 - i)z + 4 - 3i = 0$

2) A tout point M d'affixe z on associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = z^2 - (3-i)z + 4 - 3i$.

On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ où x, y, x' et y' sont des réels.

Déterminer x' et y' en fonction de x et y.

3) a) Soit $\mathcal{H} = \{M \in P \text{ tel que } M' \in (O, \vec{j})\}$. Montrer qu'une équation cartésienne de $\mathcal{H}$ est : $x^2 - y^2 - 3x - y + 4 = 0$.

b) Déterminer la nature de $\mathcal{H}$ et préciser son centre, ses sommets, ses foyers, ses asymptotes et ses directrices de.

d) Tracer la courbe $\mathcal{H}$.

Exercice 14

Soit un triangle AFB rectangle en A et tel qu'une mesure de $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BF})$ est $\theta \in]0, \pi[$, soit M un point quelconque du plan, la parallèle à (AF) issue de M coupe la droite (AB) en H et la parallèle à (FB) issue de M coupe la droite (AB) en M'. On note $\Gamma = \{M \in P / MM' = MF\}$.

1) Montrer que $M \in \Gamma \iff \frac{MF}{MH} = \frac{1}{\sin\theta}$

2) Déduire la nature de la conique Γ.

3) Dans la suite on prend $FA = 6\ cm$ et $\theta = \frac{\pi}{6}$

a) Faire une figure.

b) Soit un point M' de (AB) donné. Construire alors un point M de Γ.

c) Montrer que la droite $\mathcal{D}$ passant par O et parallèle à (BF) est une asymptote de Γ puis construire Γ.

Exercice 15

Soit θ un réel de l'intervalle $\left]-\frac{2\pi}{3}\,;\,\frac{2\pi}{3}\right[$. Soit un point $M(z)$ tel que : $z = \frac{1}{e^{2i\theta}+e^{i\theta}+1}$

1) Montrer que $z = \frac{e^{-i\theta}}{1+2\cos\theta}$

2) On pose $z = x + iy$ où x et y sont deux réels.

a) Montrer que x et y vérifient la relation : $x^2 + y^2 = (1-2x)^2$.

b) En déduire que lorsque θ varie dans l'intervalle $\left]-\frac{2\pi}{3}\,;\,\frac{2\pi}{3}\right[$, le point M décrit une hyperbole que l'on précisera.