

## Coniques 4<sup>ème</sup> Mathématiques

Dans tous les exercices le plan est rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

### Exercice 1

On considère la courbe  $\mathcal{C}$  d'équation  $x^2 + 4x + 8y - 4 = 0$ .

- 1) Montrer que  $\mathcal{C}$  est une parabole et préciser son paramètre.
- 2) Déterminer, relativement au repère  $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$  ; les coordonnées de son centre  $S$  ; de son foyer  $F$  et une équation de sa directrice  $D$ .
- 3) a) Vérifier que  $A\left(0, \frac{1}{2}\right)$  est un point de  $\mathcal{C}$ .  
b) Déterminer, relativement au repère  $R$  ; une équation de la tangente  $T$  à  $\mathcal{C}$  en  $A$   
c) Tracer la parabole  $\mathcal{C}$  et sa tangente  $T$ .

### Exercice 2

Soit  $\mathcal{C}$  la courbe d'équation  $x^2 + y^2 - 14xy + 24 = 0$ .

- 1) On considère les vecteurs  $\vec{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$  et  $\vec{v} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$ . Montrer que  $R' = (O, \vec{u}, \vec{v})$  est un repère orthonormé du plan.
- 2) Déterminer une équation cartésienne de  $\mathcal{C}$  dans le repère  $R'$ .
- 3) En déduire la nature de  $\mathcal{C}$ .

### Exercice 3

Soit la courbe  $\mathcal{P}$  d'équation :  $y^2 + 2y - 6x + 10 = 0$ .

- 1) Montrer que  $\mathcal{P}$  est une parabole.
- 2) Déterminer son sommet, son foyer et sa directrice.
- 3) a) Montrer que le point  $A(3, 2) \in \mathcal{P}$ .  
b) Donner une équation de la tangente  $T$  à  $\mathcal{P}$  en  $A$ .
- 4) Tracer la parabole  $\mathcal{P}$ .

### Exercice 4

Soit  $u$  un nombre complexe.

- 1) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation :  $z^2 - (2u - i\bar{u})z - 2iu\bar{u} = 0$ . On désignera par  $z'$  et  $z''$  ses solutions.
- 2) On désigne par  $A, M, M'$  et  $M''$  les points d'affixes respectives  $2i, u, z'$  et  $z''$ . Soit  $\mathcal{H}$  l'ensemble des points  $M$  du plan tels que  $A, M'$  et  $M''$  soient alignés.

- a) Déterminer une équation cartésienne de  $\mathcal{H}$ .
- b) Montrer que  $\mathcal{H}$  est une hyperbole dont-on précisera le centre, les sommets, les foyers, l'excentricité, les directrices et les asymptotes.
- 3) a) Vérifier que  $\mathcal{H}$  passe par le point  $O$  et donner une équation de la tangente  $T$  à en  $O$ .
- b) Tracer  $\mathcal{H}$ .

### Exercice 5

- 1) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application  $f$  qui à tout point  $M$  d'affixe  $z$  associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  tel que :  $z' = \frac{1}{4}(1 - i\sqrt{3})z$ .
- 2) On considère la courbe  $\mathcal{C}$  d'équation :  $15x^2 + 13y^2 - 2\sqrt{3}xy - 768 = 0$ .
- a) Déterminer une équation cartésienne de  $\mathcal{C}'$  image de  $\mathcal{C}$  par  $f$ .
- b) En déduire que  $\mathcal{C}'$  est une ellipse dont-on précisera les sommets, les foyers les directrices et l'excentricité
- c) Construire  $\mathcal{C}'$  et  $\mathcal{C}$ .

### Exercice 6

Pour chacune des questions suivantes une seule des réponses proposées est exacte.

- 1) La courbe représentée ci-contre admet pour équation :

a)  $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$     b)  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$     c)  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

- 2) Un des foyers de l'ellipse est le point  $F$  de coordonnées :

a)  $F(0, \sqrt{13})$     b)  $F(\sqrt{13}, 0)$     c)  $F(\sqrt{5}, 0)$

- 3) Une des directrice de l'ellipse est la droite  $\mathcal{D}$  d'équation :

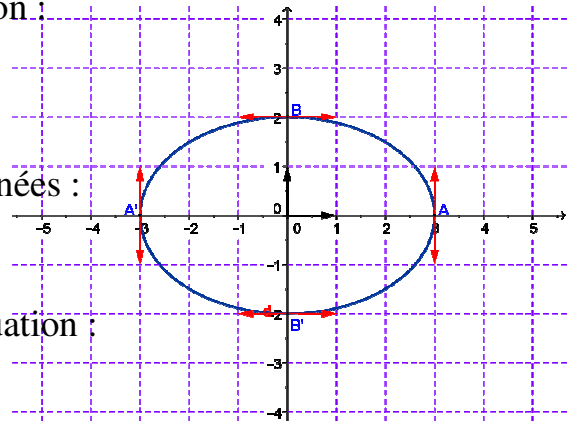
a)  $x = \frac{4}{\sqrt{13}}$     b)  $y = \frac{4}{9}$     c)  $x = \frac{9}{\sqrt{5}}$

- 4) La parabole  $\mathcal{P}$  d'équation  $y^2 = -4x$  a pour foyer  $F$  de coordonnées :

a)  $F(2, 0)$     b)  $F(0, 1)$     c)  $F(-1, 0)$

- 5) La parabole  $\mathcal{P}$  d'équation  $y^2 = -6x$  a pour paramètre :

a)  $p = -3$     b)  $p = 3$     c)  $p = 6$



### Exercice 7

- 1) Déterminer une équation cartésienne de la parabole  $\mathcal{P}$  de foyer  $F\left(\frac{5}{4}, 1\right)$  et de directrice

$D : x = \frac{11}{4}$

- 2) Vérifier que le point  $A(-1, -2)$  est un point de  $\mathcal{P}$  et donner équation de la tangente  $T$  à  $\mathcal{P}$  en  $A$ .
- 3) Construire la parabole  $\mathcal{P}$ .

### Exercice 8

On considère les points  $A(1, 0)$ ,  $B(-1, \sqrt{3})$ ,  $B'(-1, -\sqrt{3})$  et  $\Omega(-1, 0)$ . Soit  $\mathcal{E}$  l'ellipse de centre  $\Omega$  passant par  $A$  et de sommets secondaires  $B$  et  $B'$ .

- 1) Montrer que  $A$  est un sommet principal de  $\mathcal{E}$ .
- 2) Déterminer les foyers  $F$  et  $F'$ , l'excentricité et les directrices associées  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  de  $\mathcal{E}$ .
- 3) Déterminer une équation cartésienne de  $\mathcal{P}$ .
- 4) Déterminer les points  $M_1$  et  $M_2$  intersection de  $\mathcal{P}$  et l'axe des ordonnées,  $M_1$  étant le point d'ordonnée négative.
- 5) Ecrire une équation de la tangente  $T$  à  $\mathcal{E}$  en  $M_1$
- 6) Tracer  $\mathcal{P}$ ,

### Exercice 9

Soit l'application  $f$  du plan complexe dans lui-même qui à tout point  $M(z)$  associe le point  $M'(z')$  tel que  $z' = 2z - z^2$ .

- 1) Soient les points  $M_1$  et  $M_2$  d'affixes respectives  $z^2$  et  $2z$  où  $z \in \mathbb{C}$ .  
Montrer que  $OM_1M_2M'$  est un parallélogramme.
- 2) Soit  $\mathcal{H}$  l'ensemble des points  $M(z)$  tel que  $z'$  soit imaginaire pur.  
Déterminer une équation cartésienne de  $\mathcal{H}$ .
- 3) a) Montrer que  $\mathcal{H}$  est une hyperbole passant par  $O$ .  
b) Ecrire une équation de la tangente  $T$  à  $\mathcal{H}$  en  $O$ .  
c) Tracer  $T$  à  $\mathcal{H}$ .

### Exercice 10

On considère la courbe  $\Gamma$  d'équation  $y = \frac{2x-1}{x+3}$

- 1) Montrer que  $M(x, y) \in \Gamma \Leftrightarrow (y-2)(x+3) = -7$ .
- 2) a) Soit le point  $O'(-3, 2)$ . Vérifier qu'une équation de  $\Gamma$  dans le repère  $R' = (O', \vec{i}, \vec{j})$  est  $XY = -7$ .  
b) En déduire que  $\Gamma$  est une hyperbole de centre  $O'$ .

### Exercice 11

On considère l'hyperbole  $\mathcal{H}$  d'équation :  $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$  et soit le point  $M\left(\frac{1}{\cos \alpha}; 2 \tan \alpha\right)$  ;  
 $\alpha \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ .

- 1) a) Déterminer, par leurs coordonnées les sommets et les foyers de  $\mathcal{H}$ .  
b) Donner les équations cartésiennes des deux asymptotes  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  de  $\mathcal{H}$ .  
c) Tracer  $\mathcal{H}$ .  
d) Vérifier que le point  $M \in \mathcal{H}$ .
- 2) Soit  $T_M$  la tangente à  $\mathcal{H}$  en  $M$ . Montrer qu'une équation de  $T_M$  est :  $2x - y \sin \alpha - 2 \cos \alpha = 0$ .
- 3) On désigne par  $P_1$  et  $P_2$  les points d'intersection de  $T_M$  respectivement avec les droites  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$

Donner les coordonnées des points  $P_1$  et  $P_2$

### Exercice 12

Soit la droite  $\mathcal{D} : x = \frac{5}{2}$  et les points  $M(x, y)$  et  $F\left(\frac{3}{2}, -1\right)$  et le point  $H$  projeté orthogonal de  $M$  sur la droite  $\mathcal{D}$ . Soit  $\mathcal{P} : \{M \in P \text{ tel que } MH = MF\}$ .

- 1) a) Montrer que  $\mathcal{P}$  est une parabole dont-on déterminera le sommet, l'axe focal, le foyer, et la directrice.  
b) Construire  $\mathcal{P}$ .
- 2) Soit  $A$  le point de  $\mathcal{P}$  d'abscisse  $-\frac{5}{2}$  et d'ordonnée  $y_0$  positive.
  - a) Déterminer  $A$ .
  - b) Déterminer une équation cartésienne de la tangente  $T$  à  $\mathcal{P}$  en  $A$ .
  - c) Donner une équation de la droite  $T'$  perpendiculaire à  $T$  en  $A$ .
- 3) Les droite  $T$  et  $T'$  coupent l'axe focal de  $\mathcal{P}$  respectivement en  $I$  et en  $J$ .
  - a) Montrer que  $F$  est le milieu du segment  $[IJ]$ .
  - b) Soit  $K$  le projeté orthogonal de  $A$  sur l'axe focal de  $\mathcal{P}$ , montrer que  $JK = 1$

### Exercice 13

- 1) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation (E) :  $z^2 - (3 - i)z + 4 - 3i = 0$
- 2) A tout point  $M$  d'affixe  $z$  on associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  tel que :  $z' = z^2 - (3 - i)z + 4 - 3i$ .

On pose  $z = x + iy$  et  $z' = x' + iy'$  où  $x, y, x'$  et  $y'$  sont des réels.

Déterminer  $x'$  et  $y'$  en fonction de  $x$  et  $y$ .

3) a) Soit  $\mathcal{H} = \{M \in P \text{ tel que } M' \in (O, \vec{j})\}$ . Montrer qu'une équation cartésienne de  $\mathcal{H}$  est :  $x^2 - y^2 - 3x - y + 4 = 0$ .

b) Déterminer la nature de  $\mathcal{H}$  et préciser son centre, ses sommets, ses foyers, ses asymptotes et ses directrices de.

d) Tracer la courbe  $\mathcal{H}$ .

### Exercice 14

Soit un triangle  $AFB$  rectangle en  $A$  et tel qu'une mesure de  $(\vec{BA}, \vec{BF})$  est  $\theta \in ]0, \pi[$ , soit  $M$  un point quelconque du plan, la parallèle à  $(AF)$  issue de  $M$  coupe la droite  $(AB)$  en  $H$  et la parallèle à  $(FB)$  issue de  $M$  coupe la droite  $(AB)$  en  $M'$ . On note  $\Gamma = \{M \in P / MM' = MF\}$ .

1) Montrer que  $M \in \Gamma \Leftrightarrow \frac{MF}{MH} = \frac{1}{\sin \theta}$

2) Déduire la nature de la conique  $\Gamma$ .

3) Dans la suite on prend  $FA = 6 \text{ cm}$  et  $\theta = \frac{\pi}{6}$

a) Faire une figure.

b) Soit un point  $M'$  de  $(AB)$  donné. Construire alors un point  $M$  de  $\Gamma$ .

c) Montrer que la droite  $\mathcal{D}$  passant par  $O$  et parallèle à  $(BF)$  est une asymptote de  $\Gamma$  puis construire  $\Gamma$ .

### Exercice 15

Soit  $\theta$  un réel de l'intervalle  $]-\frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}[$ . Soit un point  $M(z)$  tel que :  $z = \frac{1}{e^{2i\theta} + e^{i\theta} + 1}$

1) Montrer que  $z = \frac{e^{-i\theta}}{1 + 2 \cos \theta}$

2) On pose  $z = x + iy$  où  $x$  et  $y$  sont deux réels.

a) Montrer que  $x$  et  $y$  vérifient la relation :  $x^2 + y^2 = (1 - 2x)^2$ .

b) En déduire que lorsque  $\theta$  varie dans l'intervalle  $]-\frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}[$ , le point  $M$  décrit une hyperbole que l'on précisera.