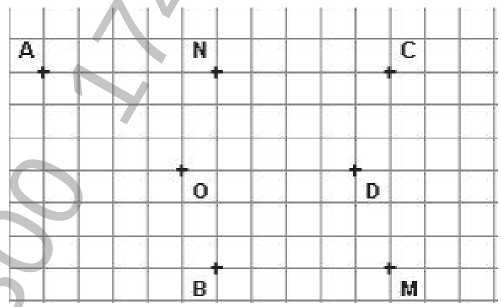
Calcul vectoriel 2ème Sciences

Exercice 1



Compléter les quatre égalités ci-contre

$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{..N}$ $\quad\quad$ $\overrightarrow{M..} = \overrightarrow{BA}$ $\quad\quad$ $\overrightarrow{NO} + \overrightarrow{NC} = \cdots$

$\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA} = \cdots$

Exercice 2

Soit ABC un triangle et soient les points M et N vérifiant : $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$.

1) Montrer que $\overrightarrow{MN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$.

2) Soient les points I et J vérifiant : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}$ et $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

a) Montrer que $(MI)//(BJ)$ et que $(NI)//(CJ)$.

b) Montrer que $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AJ}$ sont colinéaires.

c) En déduire que les points A, I et J sont alignés.

Exercice 3

Soit ABC un triangle.

1) a) Construire les points M et N définies par : $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

b) Montrer $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.

b) En déduire que $(MN)//(BC)$.

2) Soit P le milieu de $[BC]$ et G le milieu de $[MN]$.

a) Montrer que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AP}$.

b) Que représente le point G pour le triangle ABC.

3) Soit D le point tel que $ABCD$ soit un parallélogramme et soit Q le milieu de $[CD]$.

Montrer que $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$.

Exercice 4

Soit ABC un triangle quelconque et les points G et E définis par $\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{GB} - 2\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{BE} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$.

1) a) Ecrire $\overrightarrow{AG}$ à l'aide de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

b) Faire une figure.

2) a) Montrer que $3\overrightarrow{EB} + 2\overrightarrow{EC} = \vec{0}$

b) En déduire que les points A , E et G sont alignés

c) Déterminer l'ensemble $\mathcal{C}$ des points M tel que $\|3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = 10$

3) Soit le point I défini par $\overrightarrow{IA} - 3\overrightarrow{IB} = \vec{0}$

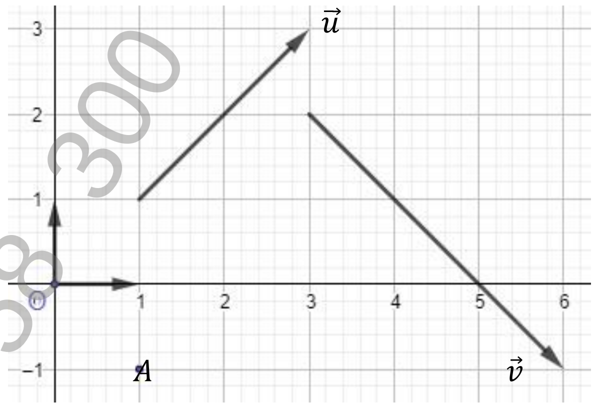
a) Montrer que le point I est le milieu du segment $[BC]$

b) Déterminer l'ensemble Δ des points M tel que $\|\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}\| = 2\|\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{BC}\|$

Dans la suite des exercices le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O\,,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$.

Exercice 5

On donne la figure ci-contre.



1) Donner par lecture graphique les composantes des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et les coordonnées du point A.

2) **a)** Calculer $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$.

b) Montrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

3) **a)** Construire les points , B , C et D tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ $\overrightarrow{AC} = \vec{u}+\vec{v}$ et $\overrightarrow{AD} = \vec{u}-\vec{v}$

b) Déterminer les coordonnées des points , B , C et D.

4) Montrer que B est le milieu du segment $[CD]$.

Exercice 6

1) Placer les points $(3\,,-1)$, $N(-5\,,5)$, $P(7\,,-4)$ et $Q(2\,,-4)$.

2) Montrer que O est le centre de gravité du triangle MNQ.

3) Soit E le symétrique de N par rapport à M.

a) Calculer les coordonnées de E.

b) Ecrire $\overrightarrow{EN}$ à l'aide de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.

4) Montrer que les points M, N et E sont alignées.

Exercice 7

1) Placer les points $(-3\,,2)$, $B(1\,,-2)$ et $C(5\,,0)$.

2) Calculer les coordonnées du point M milieu de $[AB]$.

3) Calculer les coordonnées du point I tel que $\overrightarrow{CI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CM}$.

4) Vérifier que I est le centre de gravité du triangle ABC.

5) **a)** Calculer les coordonnées de J milieu de $[IB]$.

b) Calculer les coordonnées du point N tel que $S_I(J) = N$.

6) **a)** Montrer que les points A, N et C sont alignées.

c) Montrer que N est le milieu de $[AC]$.

Exercice 8

On considère les points $(-1\,,2)$, $B(-3\,,-2)$, $C(5\,,-1)$ et $D(5,-3)$.

1) Montrer que $(\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AC})$ est une base de l'ensemble des vecteurs du plan.

2) **a)** Montrer que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux.

b) Déduire la nature du triangle ABC.

3) Les points A , C et D sont-ils alignés ?

4) **a)** Calculer BC et BD.

c) Déduire que le point B appartient à la médiatrice de $[CD]$.

Exercice 9

Soit ABC un triangle quelconque. On note A' le milieu du segment $[AB]$.

1) Placer les points M et L tel que $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AL} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$.

2) On considère le repère cartésien $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

a) Déterminer les coordonnées de chacun des points A , , C , A' , M et L

b) Montrer que les point $'$, M et B sont alignés.

3) On donne les points $P\left(1, \frac{3}{2}\right)$ et $Q\left(\frac{3}{2}, 1\right)$. Montrer que $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$.

Exercice 10

1) On donne les points $A(3, 1)$; $B(0, -5)$ et $H(a, 2a-5)$ où a est un réel.

a) Montrer que pour tout réel a le point H appartient à la droite (AB).

b) Déterminer le réel a pour que la droite (OH) soit perpendiculaire à (AB).

2) On suppose que $H(2, -1)$.

a) Montrer que $(\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HO})$ est une base orthonormé.

b) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{OB}$ dans le repère $(H, \overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HO})$.

Exercice 11

On donne les points $A(-4, -4)$; $B(5, -1)$ et $C(1, 6)$

Soit D le projeté orthogonal du point B sur la droite (AC).

1) Montrer qu'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{AC}$.

2) **a)** Exprimer les coordonnées du point D en fonction de k.

b) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{BD}$ en fonction de k.

e) Déterminer alors k puis déterminer les coordonnées du point D.

3) On donne les vecteurs $\vec{u}\binom{m}{3}$ et $\vec{v}\binom{1}{2m+1}$ où $m \in \mathbb{R}$. Déterminer les valeurs de m pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.