Calcul intégral 4ème Sc Techniques 2020-2021

Dans tous les exercices le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Exercice 1

Calculer les intégrales suivantes

$\int_0^1 (3x^2-2x+1)\,dx$; $\int_0^1 \frac{2v}{\sqrt{v^2+1}}\,dv - \int_3^1 \frac{2v}{\sqrt{v^2+1}}\,dv$; $\int_1^0 \frac{x^2}{(1+x^3)^5}\,dx$; $\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$

; $\int_0^1 (x+3e^{2x})\,dx$; $\int_0^2 \frac{e^x+1}{e^{2x}+2x}\,dx$; $\int_0^1 \frac{x+2}{x+1}\,dx$; $\int_0^{\ln 2} \frac{e^{-2x}}{\sqrt{1+e^{-2x}}}\,dx$; $\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,d$

$\int_0^1 \frac{x^2+1}{x^3+3x+1}\,dx$; ; $\int_0^1 x^2 e^{(x^3+1)}\,dx$; $\int_1^e \frac{(\ln x)^4}{x}\,dx$; $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x}}\,dx$; $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

Exercice 2

Soit la fonction f définie sur $]-2,+\infty[$ par $(x) = \frac{3x^2+4x-5}{x+2}$.

1) **Montrer que $\forall x \in]-2,+\infty[$ $f(x) = 3x - 2 - \frac{1}{x+2}$.**

2) **Calculer alors $\int_0^1 f(x)\,dx$.**

Exercice 3

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus[-2]$ par : $f(x) = \frac{12x+6}{(x+2)^2}$

1) **Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que $f(x) = \frac{a}{(x+2)^2} + \frac{b}{x+2}$**

2) **Calculer $\int_0^1 f(x)\,dx$**

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x+1}}$

1) a) **Dresser le tableau de variation de f.**

   b) **Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter le résultat graphiquement**

   c) **Tracer C_f courbe de f.**

2) a) **Vérifier que pour tout $x \in]-1,+\infty[$ on a : $f(x) = \sqrt{x+1} - \frac{3}{\sqrt{x+1}}$**

   b) **Calculer l'aire de la partie du plan limitée par C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 3$**

Exercice 5

On considère les intégrales suivantes $I = \int_0^1 \frac{x^3}{(1+x^2)^3}\,dx$ et $J = \int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^3}\,dx$

1) **Calculer I et J.**

2) **En déduire la valeur de I.**

Exercice 6

Soit la fonction f définie sur $[0\,,1]$ par $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}$ et soit C_f sa courbe représentative.

1) a) Dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0\,,1]$.

b) Tracer C_f (unité graphique 4 cm).

2) Soit g la fonction définie sur $[0\,,1]$ par $g(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)$.

a) Montrer que g est une est une primitive de f sur $x\in[0\,,1]$.

b) Calculer l'aire $\mathscr{A}$ en cm^2 de la partie du plan limitée par la courbe C_f l'axe des abscisse et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.

Exercice 7

Soient la fonction f définie sur $[1\,,+\infty[$ par $f(x)=x\ln x$ et soit C_f sa courbe représentative.

1) a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Montrer que f admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J que l'on déterminera.

c) Tracer C_f et $C_{f^{-1}}$.

2) Soit F la fonction f définie sur $[1\,,+\infty[$ par $F(x)=\frac{1}{2}x^2\left(-\frac{1}{2}+\ln x\right)$.

a) Montrer que F est une primitive de f sur $[1\,,+\infty[$.

b) Calculer l'aire $\mathscr{A}$ de la partie du plan limitée par les courbes C_f et $C_{f^{-1}}$ et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$.

Exercice 8

Soit f la fonction définie sur $[0\,,+\infty[$ par :

$f(x)=x\sqrt{x^2+1}$ et soit (C_f) sa courbe représentative.

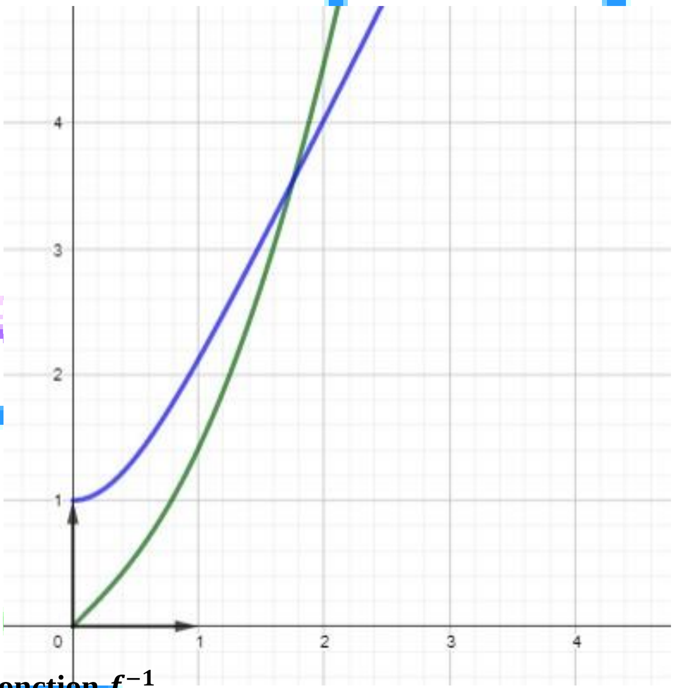
1) a) Dresser le tableau de variation de f

b) Montrer que f admet une fonction réciproque notée f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.

c) Vérifier que $f^{-1}(2\sqrt{5})=2$

2) Ci-contre on a rprésenter (C_f) et $(C_{f'})$ courbe de f'

a) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par (C_f) et $(C_{f'})$ et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$



3) a) Tracer dans le même repère la courbe $(C_{f^{-1}})$ de la fonction f^{-1}

b) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ et les droites d'équations $x=0$ et $x=2\sqrt{5}$ et $y=2\sqrt{5}$

Exercice 9

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

1) a) Dresser le tableau des variations de f.

b) Tracer la courbe représentative (C) de f.

2) a) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1\,,1[$

b) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tous $x \in]-1\,,1[$.

c) Construire la courbe représentative (C') de f^{-1} dans le même repère.

3) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine limité par la courbe (C'), l'axe des ordonnées et la droite $y = 1$

4) a) Montrer que pour tous $x \in \mathbb{R}^+$; $[f(x)]^2 - 1 = \frac{-4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$

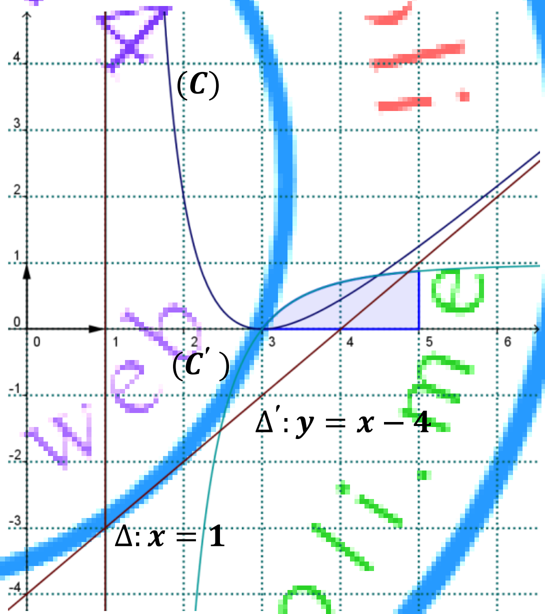
b) Calculer $I = \int_0^1 [f(x)]^2\, dx$.

Exercice 10

Dans le graphique ci-contre (C) et (C') sont les courbes représentatives d'une fonction f dérivable sur $]1\,,+\infty[$ et de sa fonction dérivée f'.

Les droites Δ et Δ' d'équations respectives $x = 1$ et $y = x - 4$ sont des asymptotes à (C). La courbe (C) admet au point d'abscisse 3 une tangente horizontale.

On désigne par A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C'), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 3$ et $x = 5$.



1) Par lecture graphique :

a) Déterminer, parmi les courbes (C) et (C') celle qui représente la fonction f'.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Donner $f(3)$, $f'(3)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) - (x-4)$ et $\lim_{x\to1^+} f(x)$.

2) On suppose que $f(5) = \frac{5}{4}$ calculer A.

Exercice 11

1) Soit g la fonction définie sur $]0\,,+\infty[$ par $g(x) = 1 - \frac{1}{x} + \ln x$ et soit C_g sa courbe représentative.

a) Calculer $\lim_{x\to0^+} g(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x)$

b) Calculer $\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x}$ et interpréter le résultat graphiquement.

c) Montrer que g est dérivable sur $]0\,,+\infty[$ et que pour tout $x \in]0\,,+\infty[$; $g'(x) = \frac{1+x}{x^2}$

d) Dresser le tableau de variation de g.

2) a) Donner une équation cartésienne de la tangente T à la courbe C_g au point A d'abscisse 1.

c) Tracer T et C_g.

3) Soit f la fonction définie sur $]0\,,+\infty[$ par $f(x) = -1 + (x-1)\ln x$.

On donne ci-dessous le tableau de variation de f.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ $+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans l'intervalle $]0\,,+\infty[$ exactement deux solutions notées α

et β. On prendra $\alpha < \beta$.

b) Justifier que $0,2 < \alpha < 0,3$ et que $2,2 < \beta < 2,3$.

4) Soit $\mathfrak{E}$ la partie du plan limitée par la courbe C_g, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = \beta$. On désigne par A la mesure de $\mathfrak{E}$. Hachurer $\mathfrak{E}$.

b) Vérifier que pour tout $x \in]0\,,+\infty[$ on a : $f'(x) = g(x)$.

c) montrer que $A = \int_1^{\alpha} g(x)\,dx + \int_1^{\beta} g(x)\,dx$

d) En déduire la valeur de A.

Exercice 12

1) Soit la fonction u définie sur IR par : $u(x) = e^x - x$.

a) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} u(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)$

b) Dresser le tableau de variation de u.

c) En déduire que : $\forall x \in IR\,, u(x) > 0$.

2) Soit la fonction g définie sur IR par $g(x) = (2-x)e^x - 1$.

a) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

b) Dresser le tableau de variation de g.

c) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions ; on notera par α la solution qui appartient à l'intervalle $]-\infty\,,1]$ et par β l'autre solution.

d) Fn déduire le signe de $g(x)$ sur IR.

3) Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$ on désigne par C_f sa courbe représentative.

a) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) Montrer que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1}$ et que $f(\beta) = \frac{1}{\beta - 1}$.

c) Vérifier que $\forall x \in IR$ on a : $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x - x)^2}$ et dresser le tableau de variation de f.

d) Tracer dans un repère orthonormé (unité graphique 2 cm) la courbe de f.

On prendra $\alpha = -1,1$ et $\beta = 1,8$.

4) Soit $\mathcal{A}$ la mesure de l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C_f l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 1$. Calculer $\mathcal{A}$.

Exercice 13

Soit f la fonction définie sur $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right[$ par : $f(x) = x^2(2\ln x - 3)$ et soit C_f sa courbe représentative.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}$.

2) a) Montrer que pour tout $x \in \left[\frac{1}{e}, +\infty\right[$ on a : $f'(x) = 4x(\ln x - 1)$.

b) Résoudre dans $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right[$ l'inéquation $\ln x - 1 > 0$, en déduire le signe de $f'(x)$ sur $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right[$.

c) Déterminer les valeurs exactes de $\left(\frac{1}{e}\right)$, $f(1)$, $f(\sqrt{e})$ et $f(e)$.

d) Dresser le tableau de variation de f.

3) a) Déterminer les coordonnées du point A intersection de C_f et l'axe des abscisses.

b) Donner une équation cartésienne de la tangente T à C_f au point A.

c) Tracer C_f et T.

4) Soit F la fonction définie sur $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right[$ par : $F(x) = \frac{2}{3}x^2 \ln x - \frac{11}{3}x^3$.

a) Montrer que F est une primitive de f sur $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right[$.

b) Calculer $\mathcal{A}$ la mesure de l'aire du partie du plan limitée par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

Exercice 14

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \sqrt{1 + x\,ln\,x} & si\ \ x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$ soit C sa courbe.

1) a) Montrer que f est continue à droite en 0.

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter le résultat graphiquement.

2) a) Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $f'(x) = \frac{1+n\,x}{2\sqrt{1+x\,ln\,x}}$

b) Dresser le tableau de variation de f

3) Etudier la branche infinie de C et tracer C

4) Soit les fonctions g et h définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{2}x^2\,ln\,x - \frac{1}{2}x^2$ et $h(x) = x\,ln\,x$

a) Montrer que g est une primitive de h sur $]0, +\infty[$

b) Calculer $\int_1^e (f(x))^2\,dx$