Exercice 1

Soit x un réel tel que : $x \neq -1$ et $x \neq \frac{3}{2}$

Soit $A = 8x^3 - 27 + (3-2x)(3x^2+6x+10)$ et $B = 4x^2 - 12x + 9 + (2x-3)(x^2+4)$

1) Factoriser A et B

2) Montrer que $\frac{A}{B} = \frac{x-1}{x+1}$

Exercice 2

1) a) Factoriser $A = 8x^3 - 27 - 2(2x-3)(3x+17)$

b) Factoriser $B = (x-3)(4x^2-25) + (2x-6)(2x+5)$

2) a) Résoudre dans ℝ, $B = 0$

b) Pour quelles valeurs du réel x on a $B \neq 0$

c) Pour les valeurs du réel x trouvées montrer que $\frac{A}{B} = \frac{2x-5}{x-3}$

Exercice 3

Soit $A = (x+3)^2 - (x-3)^2$

1) Factoriser A

2) Sans utiliser une calculatrice, en déduire la valeur de $B = 2023^2 - 2017^2$

Exercice 4

Sans utiliser une calculatrice calculer : $A = 19786534^2 - 19786532 \times 19786536$

Exercice 5

1) Montrer que pour tous réels positifs x et y on a : $2xy \leq x^2 + y^2$

2) Montrer les inégalités suivantes que pour tous réels strictement positifs x et y

$x + \frac{1}{x} \geq 2$ et $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$

Exercice 6

Soit le réel $a = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} + \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$

1) a) Calculer a^2

b) En déduire une écriture plus simple de a.

c) Déterminer une écriture plus simple de a par une autre méthode.

2) Montrer que a et $\frac{\sqrt{3}}{6}$ sont inverses.

Exercice 7

Simplifier les expressions suivantes :

$A = \sqrt{45} + \sqrt{80} - \sqrt{405}$, $B = \sqrt{3} - 2\sqrt{12} + 4\sqrt{27} - 5\sqrt{48}$; $C = 5\sqrt{12} + 8\sqrt{27} - \sqrt{75} - 2\sqrt{108}$

Exercice 8

Soient les réels $A = \sqrt{28 - 10\sqrt{3}}$ et $B = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$

1) Ecrire A et B sous la forme $a + b\sqrt{c}$ (a ; b et c étant des entiers)

2) Calculer alors $A + B$

Exercice 9

On donne $A = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} - \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$ et $B = \sqrt{6 + 4\sqrt{2}} + \sqrt{6 - 4\sqrt{2}}$

1) a) Calculer A^2

b) En déduire la valeur exacte de A

2) a) Calculer B^2

b) En déduire la valeur exacte de B

Exercice 10

1) Ecrire les nombres suivants sans les radicaux au dénominateur :

$A = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}$; $B = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-2\sqrt{5}}$; $C = \frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$; $D = \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$; $E = \frac{\sqrt{3}-1}{2+\sqrt{3}}$

2) Calculer les expressions suivantes

$E = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} - \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$; $F = \frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{2}+1} - \frac{2}{\sqrt{2}-3}$; $G = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$

Exercice 11

On donne $x = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ et $y = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

1) Calculer x^2 et y^2

2) Comparer alors x et y

Exercice 12

Soit les réels $A = \sqrt{8 - 2\sqrt{15}} - \sqrt{8 + 2\sqrt{15}}$ et $B = \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$

1) Calculer A^2 . En déduire une expression simple de A.

2) Montrer que $A + 2B$ est un entier.

Exercice 13

Soit $x \in [1\,,3]$ et $E = x|x-1| + 5|x-3|$

1) Simplifier l'écriture de E.

2) En déduire que $E \geq 6$

Exercice 14

1) a) Calculer $(\sqrt{3} - 2)^2$

b) Déduire une écriture plus simple de $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$.

2) Simplifier les expressions suivantes :

$A = 1 + \sqrt{3 + \sqrt{8}} + \sqrt{7 - \sqrt{40}} - \sqrt{6 + \sqrt{20}}$ et $B = \sqrt{5 + \sqrt{3 + \sqrt{2}}} \times \sqrt{5 - \sqrt{3 + \sqrt{2}}}$

3) Soit le réel $a = \sqrt{2 - \sqrt{3}} - \sqrt{2 + \sqrt{3}}$ Calculer a^2 puis déduire a

4) Soient x et y deux réels tels que : $\frac{5}{3} < x < 5$ et $-2 < y < -1$.

Donner un encadrement de : $-3x+2y$; $\frac{y^2+1}{x}$ et xy

5) Soient a et b deux réels tels que : $-\frac{1}{2}\leq a\leq -\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}\leq b\leq 1$

Montrer que $\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}\leq \frac{1}{\sqrt{1-b^2}}$

Exercice 15

Soit a a , b et c trois réels tels que : $a+b+c=0$

1) a) Factoriser a^3+b^3

b) Montrer que $a^2+b^2=c^2-2ab$

c) En déduire que $a^3+b^3+c^3=3abc$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(-2x+1)^3+(3x-4)^3+(-x+3)^3$

Exercice 16

Un magasin décide de faire une réduction à la caisse sur tous ses articles restants en stock. Le prix d'un article est de 90^D

Quel est le prix payé à la caisse par le client ?

Exercice 17

Un marchand de légumes a acheter $60Kg$ de pomme de terre à $1^D,200$ le Kg, il a vendu 60% de la quantité avec un bénéfice de 50% sur le prix d'achat, et le reste de la quantité avec une perte de 20% sur le prix d'achat. Le marchant est-il perdant ou gagnant et donner le montant de la perte ou du gain.

Exercice 18

1) a) Soit n un entier naturel non nul , montrer que $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}$

b) En déduire que pour tout entier naturel n non nul on a $\frac{1}{2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$

3) a) Calculer 2020×2021

b) Simplifier alors l'expression $E=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\cdots+\frac{1}{4082420}$

Exercice 19

1) Soit $\in IR_+$. Montrer que $\sqrt{p+1}-\sqrt{p}$ est l'inverse de $\sqrt{p+1}+\sqrt{p}$

2) Calculer $\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{63}+\sqrt{64}}$

3) Déterminer le plus grand entier naturel n tel que $\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\leq 9$

Exercice 20

Soit $f(x)=2x^2-x-1$

1) Montrer que $f(x+1)-f(x)=4x+1$

2) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a : $5+9+13+\cdots+(4n+1)=2n^2+3n$

3) Calculer alors $5+9+13+\cdots+45$

4) a) Développer et réduire l'expression suivante : $(2x+17)(x-7)$

b) Déterminer l'entier naturel n tel que $5+9+13+\cdots+4n+1=119$

Exercice 21

Soit $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

1) Montrer que $x^2 + x - 1 = 0$ et que $\frac{1}{x} = x + 1$

2) En déduire que $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} + \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}} = \sqrt{5}$

Exercice 22

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, ordonner du plus petit au plus grand les réels $\frac{1}{n}$; $\frac{1}{n+1}$ et $\frac{1}{n+2}$

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\frac{3}{n+2} < \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} < \frac{3}{n}$

3) En déduire que $0,029 < \frac{1}{100} + \frac{1}{101} + \frac{1}{102} < 0,030$

Exercice 23

1) a) Montrer que pour tout réel , on a : $1 - x^7 = (1-x)\left(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6\right)$

b) Factoriser alors : $1 + x^7$

2) a) Calculer $A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128}$

b) Calculer $B = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} + \frac{1}{128}$

3) Soit n un entier naturel pair

On donne pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$C = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \cdots + \left(\frac{-1}{2}\right)^n\right)$$

Montrer que $C = 4 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$