

**Exercice 1**

Soit  $x$  un réel tel que :  $x \neq -1$  et  $x \neq \frac{3}{2}$

Soit  $A = 8x^3 - 27 + (3 - 2x)(3x^2 + 6x + 10)$  et  $B = 4x^2 - 12x + 9 + (2x - 3)(x^2 + 4)$

1) Factoriser  $A$  et  $B$

2) Montrer que  $\frac{A}{B} = \frac{x-1}{x+1}$

**Exercice 2**

1) a) Factoriser  $A = 8x^3 - 27 - 2(2x - 3)(3x + 17)$

b) Factoriser  $B = (x - 3)(4x^2 - 25) + (2x - 6)(2x + 5)$

2) a) Résoudre dans  $\mathbb{R}$ ,  $B = 0$

b) Pour quelles valeurs du réel  $x$  on a  $B \neq 0$

c) Pour les valeurs du réel  $x$  trouvées montrer que  $\frac{A}{B} = \frac{2x-5}{x-3}$

**Exercice 3**

Soit  $A = (x + 3)^2 - (x - 3)^2$

1) Factoriser  $A$

2) Sans utiliser une calculatrice, en déduire la valeur de  $B = 2023^2 - 2017^2$

**Exercice 4**

Sans utiliser une calculatrice calculer :  $A = 19786534^2 - 19786532 \times 19786536$

**Exercice 5**

1) Montrer que pour tous réels positifs  $x$  et  $y$  on a :  $2xy \leq x^2 + y^2$

2) Montrer les inégalités suivantes que pour tous réels strictement positifs  $x$  et  $y$

$$x + \frac{1}{x} \geq 2 \quad \text{et} \quad \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$$

**Exercice 6**

Soit le réel  $a = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} + \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$

1) a) Calculer  $a^2$

b) En déduire une écriture plus simple de  $a$ .

c) Déterminer une écriture plus simple de  $a$  par une autre méthode.

2) Montrer que  $a$  et  $\frac{\sqrt{3}}{6}$  sont inverses.

**Exercice 7**

Simplifier les expressions suivantes :

$$A = \sqrt{45} + \sqrt{80} - \sqrt{405}, \quad B = \sqrt{3} - 2\sqrt{12} + 4\sqrt{27} - 5\sqrt{48}; \quad C = 5\sqrt{12} + 8\sqrt{27} - \sqrt{75} - 2\sqrt{108}$$

**Exercice 8**

Soient les réels  $A = \sqrt{28 - 10\sqrt{3}}$  et  $B = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$

1) Ecrire  $A$  et  $B$  sous la forme  $a + b\sqrt{c}$  ( $a$  ;  $b$  et  $c$  étant des entiers)

2) Calculer alors  $A + B$

### Exercice 9

On donne  $A = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} - \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$  et  $B = \sqrt{6 + 4\sqrt{2}} + \sqrt{6 - 4\sqrt{2}}$

1) a) Calculer  $A^2$

b) En déduire la valeur exacte de  $A$

2) a) Calculer  $B^2$

b) En déduire la valeur exacte de  $B$

### Exercice 10

1) Ecrire les nombres suivants sans les radicaux au dénominateur :

$$A = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} ; B = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-2\sqrt{5}} ; C = \frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} ; D = \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} ; E = \frac{\sqrt{3}-1}{2+\sqrt{3}}$$

2) Calculer les expressions suivantes

$$E = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} - \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} ; F = \frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{2}+1} - \frac{2}{\sqrt{2}-3} ; G = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$$

### Exercice 11

On donne  $x = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}$  et  $y = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

1) Calculer  $x^2$  et  $y^2$

2) Comparer alors  $x$  et  $y$

### Exercice 12

Soit les réels  $A = \sqrt{8 - 2\sqrt{15}} - \sqrt{8 + 2\sqrt{15}}$  et  $B = \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$

1) Calculer  $A^2$ . En déduire une expression simple de  $A$ .

2) Montrer que  $A + 2B$  est un entier.

### Exercice 13

Soit  $x \in [1, 3]$  et  $E = x|x - 1| + 5|x - 3|$

1) Simplifier l'écriture de  $E$ .

2) En déduire que  $E \geq 6$

### Exercice 14

1) a) Calculer  $(\sqrt{3} - 2)^2$

b) Déduire une écriture plus simple de  $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$ .

2) Simplifier les expressions suivantes :

$$A = 1 + \sqrt{3 + \sqrt{8}} + \sqrt{7 - \sqrt{40}} - \sqrt{6 + \sqrt{20}} \text{ et } B = \sqrt{5 + \sqrt{3 + \sqrt{2}}} \times \sqrt{5 - \sqrt{3 + \sqrt{2}}}$$

3) Soit le réel  $a = \sqrt{2 - \sqrt{3}} - \sqrt{2 + \sqrt{3}}$  Calculer  $a^2$  puis déduire  $a$

4) Soient  $x$  et  $y$  deux réels tels que :  $\frac{5}{3} < x < 5$  et  $-2 < y < -1$ .

Donner un encadrement de :  $-3x + 2y$  ;  $\frac{y^2+1}{x}$  et  $xy$

5) Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que :  $-\frac{1}{2} \leq a \leq -\frac{1}{3}$  et  $\frac{1}{2} \leq b \leq 1$

Montrer que  $\frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-b^2}}$

### Exercice 15

Soit  $a, b$  et  $c$  trois réels tels que :  $a + b + c = 0$

1) a) Factoriser  $a^3 + b^3$

b) Montrer que  $a^2 + b^2 = c^2 - 2ab$

c) En déduire que  $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

2) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $(-2x + 1)^3 + (3x - 4)^3 + (-x + 3)^3$

### Exercice 16

Un magasin décide de faire une réduction à la caisse sur tous ses articles restants en stock. Le prix d'un article est de  $90^D$

Quel est le prix payé à la caisse par le client ?

### Exercice 17

Un marchand de légumes a acheter  $60Kg$  de pomme de terre à  $1^D$ ,  $200$  le  $Kg$ , il a vendu  $60\%$  de la quantité avec un bénéfice de  $50\%$  sur le prix d'achat, et le reste de la quantité avec une perte de  $20\%$  sur le prix d'achat. Le marchand est-il perdant ou gagnant et donner le montant de la perte ou du gain.

### Exercice 18

1) a) Soit  $n$  un entier naturel non nul, montrer que  $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$

b) En déduire que pour tout entier naturel  $n$  non nul on a  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

3) a) Calculer  $2020 \times 2021$

b) Simplifier alors l'expression  $E = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{4082420}$

### Exercice 19

1) Soit  $\in \mathbb{R}_+$ . Montrer que  $\sqrt{p+1} - \sqrt{p}$  est l'inverse de  $\sqrt{p+1} + \sqrt{p}$

2) Calculer  $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{63}+\sqrt{64}}$

3) Déterminer le plus grand entier naturel  $n$  tel que  $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \leq 9$

### Exercice 20

Soit  $f(x) = 2x^2 - x - 1$

1) Montrer que  $f(x+1) - f(x) = 4x + 1$

2) En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a :  $5 + 9 + 13 + \dots + (4n + 1) = 2n^2 + 3n$

3) Calculer alors  $5 + 9 + 13 + \dots + 45$

4) a) Développer et réduire l'expression suivante :  $(2x + 17)(x - 7)$

b) Déterminer l'entier naturel  $n$  tel que  $5 + 9 + 13 + \dots + 4n + 1 = 119$

### Exercice 21

Soit  $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

1) Montrer que  $x^2 + x - 1 = 0$  et que  $\frac{1}{x} = x + 1$

2) En déduire que  $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} + \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}} = \sqrt{5}$

### Exercice 22

1) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , ordonner du plus petit au plus grand les réels  $\frac{1}{n}$  ;  $\frac{1}{n+1}$  et  $\frac{1}{n+2}$

2) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on a :  $\frac{3}{n+2} < \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} < \frac{3}{n}$

3) En déduire que  $0,029 < \frac{1}{100} + \frac{1}{101} + \frac{1}{102} < 0,030$

### Exercice 23

1) a) Montrer que pour tout réel , on a :  $1 - x^7 = (1 - x)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)$

b) Factoriser alors :  $1 + x^7$

2) a) Calculer  $A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128}$

b) Calculer  $B = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} + \frac{1}{128}$

3) Soit  $n$  un entier naturel pair

On donne pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$C = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \dots + \left(\frac{-1}{2}\right)^n\right)$$

Montrer que  $C = 4 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$