Exercice 1

Soit x un réel tel que : $x \neq -1$ et $x \neq \frac{3}{2}$ On donne les expressions suivantes

$A = 8x^3 - 27 + (3-2x)(3x^2 + 6x + 10)$ et $B = 4x^2 - 12x + 9 + (2x-3)(x^2+4)$

1) Factoriser A et B
2) Montrer que $\frac{A}{B} = \frac{x-1}{x+1}$

Exercice 2

Factoriser $A = x^3 - 8 + (x^2 - 4)$, $B = x^3 + 125 + (x+5)(5x+2)$

Exercice 3

Soit $A = (x+3)^2 - (x-3)^2$

1) Factoriser A
2) Sans utiliser une calculatrice, en déduire la valeur de $B = 2003^2 - 1997^2$

Exercice 4

1) a) Factoriser $A = 8x^3 - 27 - 2(2x-3)(3x+17)$
   b) Factoriser $B = (x-3)(4x^2 - 25) + (2x-6)(2x+5)$
2) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$, $B = 0$
   b) Pour quelles valeurs du réel x on a $B \neq 0$
   c) Pour les valeurs du réel x trouvées montrer que $\frac{A}{B} = \frac{2x-5}{x-3}$

Exercice 5

Sans utiliser une calculatrice calculer : $A = 19786534^2 - 19786532 \times 19786536$

Exercice 6

1) Montrer que pour tous réels positifs x et y on a : $2xy \leq x^2 + y^2$
2) Montrer les inégalités suivantes sachant que les réels considérés sont strictement positifs

$x + \frac{1}{x} \geq 2$ $\qquad$ $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$

Exercice 7

Soit le réel $a = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} + \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$

1) a) Calculer a^2

b) En déduire une écriture plus simple de a.

c) Déterminer une écriture plus simple de a par une autre méthode.

2) Montrer que a et $\frac{\sqrt{3}}{6}$ sont inverses.

Exercice 8

Simplifier les expressions suivantes : $A=\sqrt{45}+\sqrt{80}-\sqrt{405}$, $B=\sqrt{3}-2\sqrt{12}+4\sqrt{27}-5\sqrt{48}$

$C=5\sqrt{12}+8\sqrt{27}+\sqrt{75}-2\sqrt{45}-4\sqrt{147}$

Exercice 9

1) Ecrire les réels $A=\sqrt{28-10\sqrt{3}}$ et $B=\sqrt{4+2\sqrt{3}}$ sous la forme $a+b\sqrt{c}$ (a ; b et c étant des entiers)

2) Calculer alors $A+B$

Exercice 10

On donne $A=\sqrt{3-2\sqrt{2}}-\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ et $B=\sqrt{6+4\sqrt{2}}+\sqrt{6-4\sqrt{2}}$

1) a) Calculer A^2

b) En déduire la valeur exacte de A

2) a) Calculer B^2

b) En déduire la valeur exacte de B

Exercice 11

Ecrire les nombres suivants sans les radicaux au dénominateur :

$A=\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}$, $B=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-2\sqrt{5}}$, $C=\dfrac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$, $D=\dfrac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$, $E=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2+\sqrt{3}}$

Exercice 12

Calculer les expressions suivantes $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}-\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$; $\dfrac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{2}+1}-\dfrac{2}{\sqrt{2}-3}$; $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}-\dfrac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$

Exercice 13

On donne $x=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ et $y=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

1) Calculer x^2 et y^2

2) Comparer alors x et y

Exercice 14

Soit les réels $A=\sqrt{8-2\sqrt{15}}-\sqrt{8+2\sqrt{15}}$ et $B=\sqrt{7+4\sqrt{3}}$

1) Calculer A^2. En déduire une expression simple de A.
2) Montrer que $A+2B$ est un entier.

Exercice 15

Soit $x\in[1\ ,\ 3]$ et $E=x|x-1|+5|x-3|$

1) Simplifier l'écriture de E.
2) En déduire que $E\geq 6$

Exercice 16

1) a) Calculer $(\sqrt{3}-2)^2$

   b) Déduire une écriture plus simple de $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$.

2) Simplifier les expressions suivantes :

$$A=1+\sqrt{3+\sqrt{8}}+\sqrt{7-\sqrt{40}}-\sqrt{6+\sqrt{20}} \text{ et } B=\sqrt{5+\sqrt{3+\sqrt{2}}}\times\sqrt{5-\sqrt{3+\sqrt{2}}}$$

3) Soit le réel $a=\sqrt{2-\sqrt{3}}-\sqrt{2+\sqrt{3}}$ Calculer a^2 puis déduire .

4) Soient x et y deux réels tels que : $\frac{5}{3}<x<5$ et $-2<y<-1$.

Donner un encadrement de : $-3x+2y$; $\frac{y^2+1}{x}$ et xy

5) Soient a et b deux réels tels que : $-\frac{1}{2}\leq a\leq-\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}\leq b\leq 1$

Montrer que $\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}\leq\frac{1}{\sqrt{1-b^2}}$

Exercice 17

1) Soit x un réel, factoriser l'expression : $A=(x+3)^3-x^3-1$.
2) En déduire la valeur de la somme : $S=1\times2+2\times3+3\times4+........+98\times99+99\times100$

Exercice 18

1) Vérifier chacune des égalités suivantes :

$$\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}=\sqrt{10}\ ;\ \sqrt{4+\sqrt{7}}+\sqrt{4-\sqrt{7}}=\sqrt{14} \text{ et } (9+\sqrt{5})^3+(9-\sqrt{5})^3=12^3$$

1) Ecrire sans radicaux aux dénominateurs les nombres suivants :

$$x=\frac{\sqrt{6}-2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\ ;\ y=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \text{ et } y=\frac{\sqrt{3}-1}{4-\frac{1}{\sqrt{3}+1}}$$

Exercice 19

1) a) Montrer que pour tout réel , on a : $1 - x^7 = (1 - x)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)$

   b) Factoriser alors : $1 + x^7$

2) a) Calculer $A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128}$

   b) Calculer $B = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} + \frac{1}{128}$

3) Soit n un entier naturel pair

On donne $C = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \cdots + \left(\frac{-1}{2}\right)^n\right)$

Montrer que $C = 4 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

Exercice 20

Un marchand de légumes a acheter 60 Kg de pomme de terre à 0^{D},600 le Kg, il a vendu 60% de la quantité Avec un bénéfice de 50% sur le prix d'achat, et le reste de la quantité avec une perte de 20% sur le prix d'achat. Le marchant est-il perdant ou gagnant et donner le montant de la perte ou du gain

Exercice 21

1) a) Soit n un entier naturel non nul , montrer que $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$

   b) En déduire que pour tout entier naturel n non nul on a $\frac{1}{2} + \frac{1}{2\times3} + \frac{1}{3\times4} + \frac{1}{4\times5} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

3) a) Calculer 2020×2021

   b) Simplifier alors l'expression $E = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \cdots + \frac{1}{4082420}$

Exercice 22

1) Soit $p \in IR_+$. Montrer que $\sqrt{p+1} - \sqrt{p}$ est l'inverse de $\sqrt{p+1} + \sqrt{p}$

2) Calculer $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{63}+\sqrt{64}}$

3) Déterminer le plus grand entier naturel n tel que $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} \leq 9$