

Exercice 1

Montrer par récurrence les propositions suivantes

- 1) $2^{3n} - 1$ est divisible par 7 $\forall n \in \mathbb{N}$
- 2) $3^{4n+2} + 5^{2n+1}$ est divisible par 7 $\forall n \in \mathbb{N}$
- 3) $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7 $\forall n \in \mathbb{N}$ et $3^{2n} + 2^{6n-5}$ est divisible par 11. $\forall n \in \mathbb{N}^*$
- 4) $3^{n+6} - 3^n$ est divisible par 7 $\forall n \in \mathbb{N}$

Exercice 2

- 1) a) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $2 \times 3^{5n+4} + 3$ est divisible par 11
b) En déduire le reste de la division euclidienne de $4 \times 3^{2019} + 13$ par 11
- 2) a) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $4^n - 1$ est divisible par 3
b) En déduire le reste de la division euclidienne de $8^n - 2^n + 29$ par 3

Exercice 3

- 1) a) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $3^{2n} - 1$ est divisible par 8
b) En déduire que $3^{2n+1} - 3$ est divisible par 8
- 2) a) Déterminer les restes de la division euclidienne par 8 des nombres 3^{2n} et 3^{2n+1}
b) Déterminer les restes de la division euclidienne par 8 des nombres 3^{2019} et $5 \times 3^{2020} + 2$

Exercice 4

- 1) Soit p un nombre premier supérieure ou égal à 5. Montrer $p^2 - 1$ est divisible par 8
- 2) a) Justifier que 2011 est un nombre premier
b) Déterminer le reste de la division euclidienne de 2011^2 par 8

Exercice 5

- 1) Calculer les restes de la division euclidienne de 1, 4, 4^2 et 4^3 par 3
- 2) Formuler pour tout $n \in \mathbb{N}$, une hypothèse $P(n)$ concernant le reste de la division euclidienne de 4^n par 3 et montrer que $P(n)$ est vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$
- 3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ le nombre $16^n + 4^n + 3$ est-il divisible par 3.

Exercice 6

Soit le polynôme $p(x) = 6x^3 - 5x^2 - 12x - 4$

- 1) Montrer que si n est un entier naturel tel que $p(n) = 0$ alors n divise 4.
- 2) Résoudre alors dans \mathbb{R} l'équation $p(x) = 0$

Exercice 7

Soient a et b deux entiers naturels, déterminer dans chacun des cas suivant les couples (a, b)

$$a^2 - b^2 = 5 \quad a^2 - b^2 = 9 \quad a^2 - b^2 = 15 \quad a^2 - b^2 = 13 \quad a^2 - b^2 = 21$$

Exercice 8

- 1) Soit n un entier naturel, vérifier que $n^3 - 5n = (n + 3)(n^2 - 3n + 4) - 12$
- 2) Soit $A = \frac{n^3 - 5n}{n + 3}$ déterminer les valeurs de n pour que A soit un entier naturel.

Exercice 9

- 1) Soit α et β deux entiers naturels non nuls tels que $\alpha = 21n + 3$ et $\beta = 14n + 9$. On note $d = (\alpha \wedge \beta)$
 - a) Établir une relation entre α et β indépendante de n .
 - b) Montrer que d divise 21.
- 2) En déduire les valeurs de d .

Exercice 10

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 5, on considère les nombres:

$$a = n^3 - n^2 - 12n \quad \text{et} \quad b = 2n^2 - 7n - 4.$$

- 1) Montrer, après factorisation, que a et b sont des entiers naturels divisibles par $n - 4$.
- 2) On pose $\alpha = 2n + 1$ et $\beta = n + 3$. On note $d = (\alpha \wedge \beta)$
 - a) Établir une relation entre α et β indépendante de n .
 - b) Démontrer que d est un diviseur de 5.
 - c) Démontrer que les nombres α et β sont multiples de 5 si et seulement si $n - 2$ est multiple de 5.
- 3) Montrer que $2n + 1$ et n sont premiers entre eux.
- 4) a) Déterminer, suivant les valeurs de n et en fonction de n , le PGCD de a et b .
b) Vérifier les résultats obtenus dans les cas particuliers où $n = 11$ et $n = 12$.

Exercice 11

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (1 + x)^n$ où n est un entier naturel supérieure ou égal à 3

- 1) Expliciter d'une autre manière $f(x)$
- 2) Calculer de deux manières $f'(x)$
- 3) En déduire $S_n = C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3$

Exercice 12

- 1) Soit $n \in \mathbb{N}$, pour : $1 \leq n \leq 6$ calculer les restes de la division euclidienne de 5^n par 13
- 2) a) Montrer par récurrence sur n que $5^{4n} - 1$ est divisible par 13
b) En déduire que les entiers naturels $5^{4n+1} - 5$, $5^{4n+2} - 12$ et $5^{4n+3} - 8$ sont divisible par 13
c) Déterminer alors le reste de la division euclidienne de 5^{2019} par 13

- 3) Soit p un entier naturel, on considère l'entier naturel $A_p = 5^{2p} + 5^{4p}$
- Déterminer le reste de la division euclidienne de A_p par 13 dans le cas où $p = 2n$
 - Montrer que A_p est divisible par 13 dans le cas où $p = 2n + 1$
- 4) Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ par $U_n = 1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^{n-1}$
- Montrer que $U_n = \frac{5^n - 1}{4}$
 - Montrer que si U_n est divisible par 13 alors $5^n - 1$ est divisible par 13
 - Réciproquement montrer que si $5^n - 1$ est divisible par 13 alors U_n est divisible par 13
(indication $13U_n - 3 \times (4U_n) = U_n$)
 - En déduire les valeurs de n pour que U_n soit divisible par 13

Exercice 13

- Montrer que pour tous entiers naturels a , b et c on a : $(bc - a) \wedge b = a \wedge b$
- Soit n un entier naturel non nul
 - Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $5n^3 - n + 38 = (n + 2)(5n^2 - 10n + 19)$
 - En déduire que $(5n^3 - n) \wedge (n + 2) = (n + 2) \wedge 38$
- Quelles sont les valeurs possibles $(5n^3 - n) \wedge (n + 2)$
 - Pour quelles valeurs de n on a $5n^3 - n$ est divisible par $n + 2$

Exercice 14

- Soit n un entier naturel et on considère les entiers naturels $\alpha = 4n^2 + 6n + 3$ et $\beta = 2n + 1$
 - Vérifier que $\alpha = 2n(2n + 1) + (4n + 3)$
 - Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a α et β sont premiers entre eux
- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $(2n + 1) \wedge (6n + 21) = (2n + 1) \wedge 18$
 - Quelles valeurs peut prendre $d = (2n + 1) \wedge (6n + 21)$
 - Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tel que $(2n + 1)$ divise $(6n + 21)$
- En déduire des questions précédentes, l'ensemble des entiers naturels n tel que $(2n + 1)(n + 1)$ divise $(6n + 21)(4n^2 + 6n + 3)$

Exercice 15

- Montrer que, pour tout entier naturel n , $3n^3 - 11n + 48$ est divisible par $n + 3$.
 - Montrer que, pour tout entier naturel n , $3n^2 - 9n + 16$ est un entier naturel non nul.
- Montrer que, pour tous les entiers naturels non nuls a , b et c , $(a \wedge b) = (bc - a \wedge b)$
- Montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 2$, On a : $(3n^3 - 11n) \wedge (n + 3) = (48 \wedge n + 3)$
- Déterminer l'ensemble des diviseurs entiers naturels de 48.

b) En déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que $\frac{3n^3 - 11n}{n+3}$ soit un entier naturel.

Exercice 16

1) Soit dans \mathbb{N}^2 l'équation $(E_1) : 2x - 3y = 1$

a) Vérifier que $(2, 1)$ est une solution de (E_1)

b) Résoudre alors dans \mathbb{N}^2 l'équation (E_1)

2) Soit dans \mathbb{N}^2 l'équation $(E_2) : 4x - 5y = 2$

a) Vérifier que $(3, 2)$ est une solution de (E_2)

b) Résoudre alors dans \mathbb{N}^2 l'équation (E_2)

3) Soit dans \mathbb{N}^2 l'équation $(E_3) : 5x - 3y = 7$

a) Montrer que si (x, y) est une solution de (E_3) si et seulement si 2 est le reste de la division euclidienne de x par 3

b) Résoudre alors dans \mathbb{N}^2 l'équation (E_3)

Exercice 17

Soient x et y deux entiers naturel, on se propose de résoudre l'équation $(E) : 3x^2 - 7y^2 - 4 = 0$

1) Montrer que si (x, y) est solution de l'équation (E) alors 2 est le reste de la division euclidienne de y^2 par 3

2) a) Montrer que $\forall a \in \mathbb{N}, a^2$ est divisible par 3 ou que le reste de la division euclidienne de a^2 par 3 est 1

b) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E)

Exercice 18

Résoudre dans \mathbb{N}^2 , les systèmes suivants

$$S_1: \begin{cases} a \times b = 48 \\ a \vee b = 24 \end{cases} \quad S_2: \begin{cases} a \times b = 294 \\ a \wedge b = 7 \end{cases} \quad S_3: \begin{cases} a \wedge b = 6 \\ a \vee b = 90 \end{cases} \quad S_4: \begin{cases} a^2 - b^2 = 72 \\ a \wedge b = 3 \end{cases} \quad S_5: \begin{cases} a^2 + b^2 = 90 \\ a \wedge b = 3 \\ a \vee b = 27 \end{cases}$$

$$S_6: \begin{cases} a^2 - b^2 = 80 \\ a \wedge b = 4 \end{cases} \quad S_7: \begin{cases} a^2 + b^2 = 637 \\ a \wedge b = 7 \\ a \vee b = 42 \end{cases} \quad S_8: \begin{cases} a \wedge b = 3 \\ a \vee b = 60 \end{cases} \quad S_9: \begin{cases} a^2 + b^2 = 225 \\ a \wedge b = 3 \\ a \vee b = 36 \end{cases}$$

Exercice 19

On se propose de résoudre le système $S : \begin{cases} a^2 + b^2 = 765 \\ a \vee b = 126 \end{cases}$

1) Déterminer les diviseurs de 765 et de 126

2) a) Soit $d = a \wedge b$. Montrer que $d = 1$ ou $d = 3$ b) Résoudre alors dans \mathbb{N}^2 le système S .