Arithmétique 3ème Mathématiques

Exercice 1

Montrer par récurrence les propositions suivantes

1) $2^{3n} - 1$ **est divisible par 7** $\quad \forall n \in IN$

2) $3^{4n+2} + 5^{2n+1}$ **est divisible par 7** $\quad \forall n \in IN$

3) $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ **est divisible par 7** $\forall n \in IN$ **et** $3^{2n} + 2^{6n-5}$ **est divisible par 11.** $\forall n \in \mathbb{N}^*$

4) $3^{n+6} - 3^n$ **est divisible par 7** $\forall n \in IN$

Exercice 2

1) a) **Montrer par récurrence que** $\forall n \in IN$ **on a** $2 \times 3^{5n+4} + 3$ **est divisible par 11**

   b) **En déduire le reste de la division euclidienne de** $4 \times 3^{2019} + 13$ **par 11**

2) a) **Montrer par récurrence que** $\forall n \in IN$ **on a** $4^n - 1$ **est divisible par 3**

   b) **En déduire le reste de la division euclidienne de** $8^n - 2^n + 29$ **par 3**

Exercice 3

1) a) **Montrer par récurrence que** $\forall n \in IN$ **on a** $3^{2n} - 1$ **est divisible par 8**

   b) **En déduire que** $3^{2n+1} - 3$ **est divisible par 8**

2) a) **Déterminer les restes de la division euclidienne par 8 des nombres** 3^{2n} **et** 3^{2n+1}

   b) **Déterminer les restes de la division euclidienne par 8 des nombres** 3^{2019} **et** $5 \times 3^{2020} + 2$

Exercice 4

1) **Soit p un nombre premier supérieure ou égal à 5. Montrer** $p^2 - 1$ **est divisible par 8**

2) a) **Justifier que 2011 est un nombre premier**

   b) **Déterminer le reste de la division euclidienne de** 2011^2 **par 8**

Exercice 5

1) **Calculer les restes de la division euclidienne de , 4 ,** 4^2 **et** 4^3 **par 3**

2) **Formuler pour tout** $n \in IN$**, une hypothèse** $P(n)$ **concernant le reste de la division euclidienne de** 4^n **par 3 et montrer que** $P(n)$ **est vérifiée pour tout** $n \in IN$

3) **Pour tout** $n \in IN$ **le nombre** $16^n + 4^n + 3$ **est-il divisible par 3.**

Exercice 6

Soit le polynôme $p(x) = 6x^3 - 5x^2 - 12x - 4$

1) **Montrer que si n est un entier naturel tel que** $p(n) = 0$ **alors n divise 4.**

2) **Résoudre alors dans IR l'équation** $p(x) = 0$

Exercice 7

Soient a et b deux entiers naturels, déterminer dans chacun des cas suivant les couples $(a\ ,b)$

$a^2-b^2=5$ $\quad a^2-b^2=9$ $\quad a^2-b^2=15$ $\quad a^2-b^2=13$ $\quad a^2-b^2=21$

Exercice 8

1) Soit n un entier naturel, vérifier que $n^3-5n=(n+3)(n^2-3n+4)-12$
2) Soit $A=\frac{n^3-5n}{n+3}$ déterminer les valeurs de n pour que A soit un entier naturel.

Exercice 9

1) Soit α et β deux entiers naturels non nuls tels que $\alpha=21n+3$ et $\beta=14n+9$. On note $d=(\alpha\wedge\beta)$
   a) Établir une relation entre α et β indépendante de n.
   b) Montrer que d divise 21.
2) En déduire les valeurs de d.

Exercice 10

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 5, on considère les nombres:

$$a=n^3-n^2-12n \qquad \text{et} \qquad b=2n^2-7n-4.$$

1) Montrer, après factorisation, que a et b sont des entiers naturels divisibles par n - 4.
2) On pose $\alpha=2n+1$ et $\beta=n+3$. On note $d=(\alpha\wedge\beta)$
   a) Établir une relation entre α et β indépendante de n.
   b) Démontrer que d est un diviseur de 5.
   c) Démontrer que les nombres α et β sont multiples de 5 si et seulement si $n-2$ est multiple de 5.
3) Montrer que $2n+1$ et n sont premiers entre eux.
4) a) Déterminer, suivant les valeurs de n et en fonction de n, le PGCD de a et b.
   b) Vérifier les résultats obtenus dans les cas particuliers où $n=11$ et $n=12$.

Exercice 11

Soit la fonction f définie sur IR par $f(x)=(1+x)^n$ où n est un entier naturel supérieure ou égal à 3

1) Expliciter d'une autre manière $f(x)$
2) Calculer de deux manières $f'(x)$
3) En déduire $S_n=C_n^1+2C_n^2+3C_n^n$

Exercice 12

1) Soit $n\in IN$, pour : $1\le n\le 6$ calculer les restes de la division euclidienne de 5^n par 13
2) a) Montrer par récurrence sur n que $5^{4n}-1$ est divisible par 13
   b) En déduire que les entiers naturels $5^{4n+1}-5$, $5^{4n+2}-12$ et $5^{4n+3}-8$ sont divisible par 13
   c) Déterminer alors le reste de la division euclidienne de 5^{2019} par 13

3) Soit p un entier naturel, on considère l'entier naturel $A_p = 5^{2p} + 5^{4p}$

a) Déterminer le reste de la division euclidienne de A_p par 13 dans le cas où $p = 2n$

b) Montrer que A_p est divisible par 13 dans le cas où $p = 2n + 1$

4) Soit la suite (U_n) définie sur $IN^*\backslash\{1\}$ par $U_n = 1 + 5 + 5^2 + \cdots + 5^{n-1}$

a) Montrer que $U_n = \frac{5^n - 1}{4}$

b) Montrer que si U_n est divisible par 13 alors $5^n - 1$ est divisible par 13

c) Réciproquement montrer que si $5^n - 1$ est divisible par 13 alors U_n est divisible par 13

(indication $13U_n - 3 \times (4U_n) = U_n$)

d) En déduire les valeurs de $n$pour que U_n soit divisible par 13

Exercice 13

1) Montrer que pour tous entiers naturels , b et c on a : $(bc - a) \wedge b = a \wedge b$

2) Soit n un entier naturel non nul

a) Vérifier que $\forall n \in IN$ on a : $5n^3 - n + 38 = (n + 2)(5n^2 - 10n + 19)$

b) En déduire que $(5n^3 - n) \wedge (n + 2) = (n + 2) \wedge 38$

3) a) Quelles sont les valeurs possibles $(5n^3 - n) \wedge (n + 2)$

b) Pour quelles valeurs de n on a $5n^3 - n$ est divisible par $n + 2$

Exercice 14

On se propose de résoudre le système S : $\begin{cases} a^2 + b^2 = 765 \\ a \vee b = 126 \end{cases}$

1) Déterminer les diviseurs de 765 et de 126

2) a) Soit $d = a \wedge b$. Montrer que $d = 1$ ou $d = 3$

b) Résoudre alors dans IN^2 le système S.

Exercice 15

1) Soit n un entier naturel et on considère les entiers naturels $\alpha = 4n^2 + 6n + 3$ et $\beta = 2n + 1$

a) Vérifier que $\alpha = 2n(2n + 1) + (4n + 3)$

b) Montrer que $\forall n \in IN$ on a α et β sont premiers entre eux

2) a) Montrer que $\forall n \in IN$ on a $(2n + 1) \wedge (6n + 21) = (2n + 1) \wedge 18$

b) Quelles valeurs peut prendre $d = (2n + 1) \wedge (6n + 21)$

c) Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tel que $(2n + 1)$ divise $(6n + 21)$

3) En déduire des questions précédentes, l'ensemble des entiers naturels n tel que

$(2n + 1)(n + 1)$ divise $(6n + 21)(4n^2 + 6n + 3)$

Exercice 16

1) a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $3n^3 - 11n + 48$ est divisible par $n+3$.

b) Montrer que, pour tout entier naturel n, $3n^2 - 9n + 16$ est un entier naturel non nul.

2) Montrer que, pour tous les entiers naturels non nuls a, b et c, $(a \wedge b) = (bc - a \wedge b)$

3) Montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 2$, On a : $(3n^3 - 11n) \wedge (n+3) = (48 \wedge \mathrm{n} + 3)$

4) a) Déterminer l'ensemble des diviseurs entiers naturels de 48.

b) En déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que $\frac{3n^3 - 11n}{n+3}$ soit un entier naturel.

Exercice 17

1) Soit dans IN^2 l'équation (E_1) : $2x - 3y = 1$

a) Vérifier que $(2, 1)$ est une solution de (E_1)

b) Résoudre alors dans IN^2 l'équation (E_1)

2) Soit dans IN^2 l'équation (E_2) : $4x - 5y = 2$

a) Vérifier que $(3, 2)$ est une solution de (E_2)

b) Résoudre alors dans IN^2 l'équation (E_2)

3) Soit dans IN^2 l'équation (E_3) : $5x - 3y = 7$

a) Montrer que si (x, y) est une solution de (E_3) si et seulement si 2 est le reste de la division euclidienne de x par 3

b) Résoudre alors dans IN^2 l'équation (E_1)

Exercice 18

1) a) Soit x un entier naturel. Déterminer les restes de la division euclidienne de x par 29 tel que 29 divise $x^2 - 7$

b) Etablire l'équivalence [$x^2 - 19x - 1$ est divisible par 29] $\Leftrightarrow$ [$(x+5)^2 - 7$ est divisible par 29]

c) En déduire les entiers naturels x tel que $29x^2 - 19x - 11$

2) Montrer que pour tout entier naturel n ; $15^n - 8^n$ est divisible par 7.

3) Pour tout entier naturel n ; on considère le nombre $U_n = 7^n + 3^n$

a) Vérifier que 10 divise $7^4 - 1$ et 10 divise $3^4 - 1$

c) En déduire suivant les valeurs de n, les restes de la division euclidienne de U_n par 10.

Exercice 19

1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $3^{2n+1} + 2 \times 4^{3n+1}$ est divisible par 11.

b) Déterminer le reste de la division euclidienne de $N = 1 + 2^{63} + 3^{21}$ par 11.

2) Soient , b et n des entiers naturels tels que $a = 7n + 2$ et $b = 3n - 1$.

Montrer que si a et b ne sont pas premiers entre eux alors $a \wedge b = 13$.

3) Déterminer tous les couples (a , b) de $\mathbb{N}^2$ vérifiant : $\begin{cases} a \wedge b = 9 \\ a + b = 117 \\ a < b \end{cases}$

4) Soit dans $\mathbb{N}^2$ l'équation (E): $2x - 3y\ 1$

a) Vérifier que l'équation (E) est équivalente à l'équation (E'): $2(x - 5) = 3(y - 3)$

b) Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation (E).

Exercice 20

Soient x et y deux entiers naturel, on se propose de résoudre l'équation (E) : $3x^2 - 7y^2 - 4 = 0$

1) Montrer que si(x , y) est solution de l'équation (E) alors 2 est le reste de la division euclidienne de y^2 par 3

2) a) Montrer que $\forall a \in IN$, a^2 est divisible par 3 ou que le reste de la division euclidienne de a^2 par 3 est 1

b) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E)

Exercice 21

Résoudre dans IN^2, les systèmes suivants

$S_1 : \begin{cases} a \times b = 48 \\ a \vee b = 24 \end{cases}$ $S_2 : \begin{cases} a \times b = 294 \\ a \wedge b = 7 \end{cases}$ $S_3 : \begin{cases} a \wedge b = 6 \\ a \vee b = 90 \end{cases}$ $S_4 : \begin{cases} a^2 - b^2 = 72 \\ a \wedge b = 3 \end{cases}$ $S_5 : \begin{cases} a^2 + b^2 = 90 \\ a \wedge b = 3 \\ a \vee b = 27 \end{cases}$

$S_6 : \begin{cases} a^2 - b^2 = 80 \\ a \wedge b = 4 \end{cases}$ $S_7 : \begin{cases} a^2 + b^2 = 637 \\ a \wedge b = 7 \\ a \vee b = 42 \end{cases}$ $S_8 : \begin{cases} a \wedge b = 3 \\ a \vee b = 60 \end{cases}$ $S_9 : \begin{cases} a^2 + b^2 = 225 \\ a \wedge b = 3 \\ a \vee b = 36 \end{cases}$