Dans tous les exercices on suppose que le plan est orienté

Exercice 1

Donner la mesure principale des angles suivants :

$\frac{11\pi}{3}$; $\frac{31\pi}{4}$; $\frac{-15\pi}{2}$; $\frac{37\pi}{5}$; $\frac{-25\pi}{8}$; 313π ; -241π

Exercice 2

Donner la mesure principale de $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ dans chaque cas

$(\widehat{2\vec{u},3\vec{v}}) = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ $\quad$ $(\widehat{-2\vec{u},\vec{v}}) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

$(\widehat{\vec{u},-4\vec{v}}) = -\frac{4\pi}{3} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ $\quad$ $(\widehat{-5\vec{u},-3\vec{v}}) = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

$(\widehat{2\vec{v},3\vec{u}}) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ $\quad$ $(\widehat{-6\vec{v},3\vec{u}}) = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

$\begin{cases} (\widehat{2\vec{u},3\vec{w}}) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \; ; \; k \in \mathbb{Z} \\ (\widehat{\vec{w},2\vec{v}}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \; ; \; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} (\widehat{\vec{u},-2\vec{w}}) = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \; ; \; k \in \mathbb{Z} \\ (\widehat{\vec{w},-3\vec{v}}) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \; ; \; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Exercice 3

Soient A, B , C et D des points du plan tel que : $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) = \frac{25\pi}{12} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ $\quad$ $(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}}) = \frac{119\pi}{4} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ et $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}}) = -\frac{85\pi}{6} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

1) Déterminer la mesure principale de chacun des angles orientés précédents

$(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$; $(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}})$

2) Montrer que les points A, D et E sont alignés

Exercice 4

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte.

1) $(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) \equiv -\frac{125\pi}{3} [2\pi]$ alors la mesure principale de $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ est :

a) $-\frac{2\pi}{3}$ $\quad$ **b)** $\frac{\pi}{3}$ $\quad$ **c)** $\frac{2\pi}{3}$

2) Soit $(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) \equiv 0 \; [2\pi]$ alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont :

a) colinéaires et de sens contraires $\quad$ **b)** $\vec{u} \perp \vec{v}$ $\quad$ **c)** colinéaires et de même sens

3) Soit ABC un triangle isocèle de sommet principal A tel que $(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}) \equiv -\frac{\pi}{5}$

Alors la mesure principale de $(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}})$ est : **a)** $\frac{3\pi}{5}$ $\quad$ **b)** $\frac{\pi}{5}$ $\quad$ **c)** $-\frac{\pi}{5}$

Exercice 5

Soient $\alpha = \frac{25\pi}{3}$ et $\beta = \frac{-29\pi}{6}$ deux mesures respectives de deux angles orientés

$(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}})$

1) Déterminer la mesure principale α de $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)$ et la mesure principale β de $\left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}}\right)$

2) Dans la suite de l'exercice on prendra :

$\alpha = \dfrac{\pi}{3}$; $\beta = \dfrac{-5\pi}{6}$; $AB = AC = 2\ cm\ \ et\ \ AD = 3cm$ faire une figure

3) Déterminer une mesure de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right)$, que peut-on dire des vecteurs

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$

4) **a)** Construire le point E tel que

$\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}}\right) = -\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ et $AE = 3cm$

b) Montrer que les points A, C et E sont alignés.

Exercice 6

1) Soit ABC un triangle tel que :

$\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right) = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

a) Calculer $\left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}\right)$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BC}}\right)$

b) Les réels $\dfrac{101\pi}{6}$ et $\dfrac{-193\pi}{6}$ sont − ils des mesures de $\left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}\right)$

2) **a)** Construire le triangle ABC

b) Construire le point D tel que BCD soit un triangle équilatéral et

$\left(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}}\right) = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

c) Calculer $\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CD}}\right)$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{DB}}\right)$

d) Montrer que $ABDC$ est un trapèze rectangle

Exercice 7

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et passant par A. Soient B, C et D trois points du cercle $\mathcal{C}$ tel que :

$\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}}\right) = -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right) = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

$\left(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OD}}\right) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

1) Construire les points B, C et D

2) Calculer $\left(\widehat{\overrightarrow{AO},\overrightarrow{OC}}\right)$, $\left(\widehat{\overrightarrow{AO},\overrightarrow{BO}}\right)$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OD}}\right)$

3) **a)** Calculer $\left(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}}\right)$

b) Que peut-on déduire des vecteurs $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$

4) Montrer que les points C et D sont diamétralement opposés

Exercice 8

On considère les points A, B, C et D tel que :

$\left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}\right)=\frac{\pi}{6}+2k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}$; $\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CD}}\right)=-\frac{\pi}{3}+2k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}$

$\left(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CB}}\right)=\frac{14\pi}{3}+2k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}$

1) Déterminer la mesure principale $\left(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CB}}\right)$

2) Montrer que les points A, C et D sont alignés

3) Déterminer une mesure de chacun des angles orientés : $\left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}}\right)$, $\left(\widehat{-\overrightarrow{BC},3\overrightarrow{AB}}\right)$

Exercice 9

On donne : $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)=\frac{\pi}{3}+2k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}}\right)=-\frac{5\pi}{6}+2k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}$

Avec $OA=3\ cm$; $OB=2\ cm$ et $OC=3cm$

1) **a)** Faire une figure

b) Déterminer la mesure principale de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}}\right)$

c) On donne $\alpha=\frac{23\pi}{6}$; α est-elle une mesure de $\left(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}}\right)$

2) Soit $[OD)$ la bissectrice du secteur saillant $[OA,OB]$ on marque le point D tel que $OD=3\ cm$. Donner la mesure principale de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OD}}\right)$

3) Montrer que les points O, D et C sont alignés

Exercice 10

On considère un cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$ et soient D_1 et D_2 deux droites parallèles distinctes de la droite (AB) et passant respectivement par A et B.

Soit M un point de $\mathcal{C}$ distinct de A et B, soient I, J, et K les projetés orthogonaux de M respectivement sur (AB) (AB), D_1 et D_2.

1) **a)** Montrer que les points A, M, I et J sont sur un même cercle que l'on précisera.

b) Montrer que : $(\overrightarrow{JK},\overrightarrow{JI})=(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB})+2k\pi\ ;k\in\mathbb{Z}$.

2) **a)** Montrer que les points I, B, M et K sont sur un même cercle que l'on précisera.

b) Montrer que : $\left(\widehat{\overrightarrow{KI},\overrightarrow{KJ}}\right)\equiv\left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BM}}\right)+2k\pi\ ;k\in\mathbb{Z}$

3) En déduire que le triangle IJK est rectangle en I.

Exercice 11

Soit un triangle ABC et soit $\mathcal{C}$ son cercle circonscrit, soit M un point de $\mathcal{C}$ tel que : $M\notin\{B,C\}$

1) On désigne par A', B', et C' les projetés orthogonales respectifs du point M sur les droites (BC), (AC) et (AB). Faire une figure.

2) **a)** Montrer que les quatre points A', B', C et M appartiennent à un même cercle que l'on précisera.

b) En déduire que : $\left(\widehat{\overrightarrow{A'M},\overrightarrow{A'B'}}\right)=\left(\widehat{\overrightarrow{CM},\overrightarrow{CB'}}\right)+\pi+2k_1\pi\ ;\ k_1\in\mathbb{Z}$

3) a) Montrer que les quatre points A', B, C' et M appartiennent à un même cercle que l'on précisera.

b) En déduire que : $\left(\widehat{\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{A'M}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{BC'}, \overrightarrow{BM}}\right) + 2k_2\pi$; $k_2 \in \mathbb{Z}$

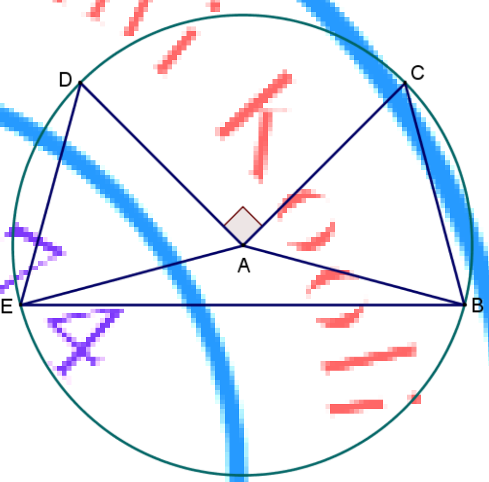
4) a) En écrivant : $\left(\widehat{\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{A'B'}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{A'M}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{A'M}, \overrightarrow{A'B'}}\right) + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ et en se rappelant que les points A, B, C et M sont sur le même cercle $\mathcal{C}$ Montrer que :

$\left(\widehat{\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{A'B'}}\right) = \pi + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

b) En déduire que les points A', B', et C' sont alignés.

Exercice 12

On représenté ci-contre un cercle de centre A et de rayon 1, les triangles ABC et ADE sont équilatéraux et le triangle ACD est rectangle en A.



1) Déterminer la mesure principale de chacun des angles :

$\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}}\right)$, $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{EB}}\right)$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{BC}}\right)$

2) Montrer que $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{EB}$ sont colinéaires.

3) Montrer que $\overrightarrow{EA}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont orthogonaux.

4) Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{ED}}\right) \equiv -\frac{23\pi}{6}$

Exercice 13

Une seule des réponses est exacte. trouver cette réponse.

1) Soit $E = \left\{M \in P / \left(\widehat{\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}}\right) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]\right\}$

a) E est l'arc $\overset{\frown}{BA}$ privé des points A et B du cercle $\mathcal{C}$ passant par A et B et tangent à (AT) en A tel que : $\left(\widehat{\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}}\right) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$.

b) E est l'arc $\overset{\frown}{BA}$ privé des points A et B du cercle $\mathcal{C}$ passant par A et B et tangent à (BT) en B tel que :

$\left(\widehat{\overrightarrow{BT}, \overrightarrow{BA}}\right) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$.

c) E est l'arc $\overset{\frown}{BA}$ privé des points A et B du cercle $\mathcal{C}$ passant par A et B et tangent à (BT) en B tel que :

$\left(\widehat{\overrightarrow{BT}, \overrightarrow{BA}}\right) \equiv -\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$.

Exercice 14

Soient deux points distincts B et C du plan tel que $BC = 6$; on se propose de compléter la construction du triangle ABC tel que: $\left(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}}\right) \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

1) Déterminer l'ensemble Δ des points M tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BM}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

2) Déterminer l'ensemble $\mathcal{C}$ des points M tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MB}}\right) \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

3) En déduire la construction du triangle ABC.

Exercice 15

Soient A, B et I trois points du plan tel que $AB = 3$ et $4\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

On se propose de construire un triangle ABC tel que : $\left(\widehat{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$ et $CB = 2CA$

1) Calculer IA et IB.

2) Déterminer l'ensemble $\mathcal{C}_1$ des points M tel que : $\left(\widehat{\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}$

3) Déterminer l'ensemble $\mathcal{C}_2$ des points M tel que : $4MA^2 - MB^2 = 0$

4) Construire alors le tringle ABC.

Exercice 16

Soit $ABCD$ un losange de centre I et tel que $AB = 4$ *et* $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{13\pi}{3}\ [2\pi]$

1) Donner la mesure principale des angles suivants : $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}\right)$; $\left(\widehat{\overrightarrow{DI}, \overrightarrow{DA}}\right)$; $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right)$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}\right)$.

2) Calculer $det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$; $det\left(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BC}\right)$; $det\left(\overrightarrow{ID}, \overrightarrow{IA}\right)$; $det\left(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{BC}\right)$; $det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{IC}\right)$.

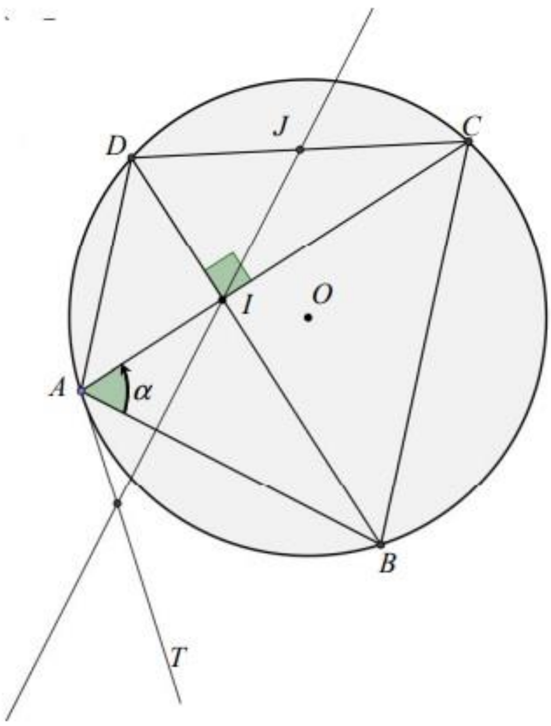
Exercice 17

Soit $ABCD$ un quadrilatère inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$ de centre O dont les diagonales se coupent en I et vérifiant : $\left(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

J est le milieu du segment $[CD]$ et (IJ) coupe (AB) en H.

Soit α la mesure principale de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right)$

$\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$



1) Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{IJ}}\right) \equiv \alpha + \left(\widehat{\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{IJ}}\right)\ [2\pi]$.

2) **a)** Exprimer $\left(\widehat{\overrightarrow{DI}, \overrightarrow{DJ}}\right)$ en fonction de α.

b) Montrer que le triangle DIJ est isocèle.

c) En déduire $\left(\widehat{\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{IJ}}\right)$ en fonction de α.

3) Montrer que $(AB) \perp (IJ)$

4) Soit $[AT)$ la tangente à $\mathcal{C}$ en A

On suppose que : $\left(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}\right) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$

La droite (IJ) coupe (AO) en F et $[AT)$ en E.

a) Montrer que le triangle AEF est isocèle.

b) Exprimer $\left(\widehat{\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AI}}\right)$ en fonction de α.

c) On $AE = 2$. Montrer que $dét\left(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AI}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{\cos\alpha} \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$.

5) Déterminer l'ensemble $\mathcal{C}_1 = \left\{M \in P \ tel\ que\ \left(\widehat{\overrightarrow{HM}, \overrightarrow{AE}}\right) \equiv \frac{5\pi}{4} [2\pi]\right\}$