Dans tous les exercices on suppose que le plan est orienté

Exercice 1

Donner la mesure principale des angles suivants :

$\frac{11\pi}{3}$; $\frac{31\pi}{4}$; $\frac{-15\pi}{2}$; $\frac{37\pi}{5}$; $\frac{-25\pi}{8}$; 313π ; -241π

Exercice 2

Donner la mesure principale de $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ dans chaque cas

$(\widehat{2\vec{u},3\vec{v}}) = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ $\qquad$ $(\widehat{-2\vec{u},\vec{v}}) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

$(\widehat{\vec{u},-4\vec{v}}) = -\frac{4\pi}{3} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ $\qquad$ $(\widehat{-5\vec{u},-3\vec{v}}) = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

$(\widehat{2\vec{v},3\vec{u}}) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ $\qquad$ $(\widehat{-6\vec{v},3\vec{u}}) = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

$\begin{cases} (\widehat{2\vec{u},3\vec{w}}) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z} \\ (\widehat{\vec{w},2\vec{v}}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} (\widehat{\vec{u},-2\vec{w}}) = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z} \\ (\widehat{\vec{w},-3\vec{v}}) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Exercice 3

Soient $x = \frac{25\pi}{3}$ et $y = \frac{19\pi}{6}$ deux mesures respectives de deux angles orientés $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}})$

1) **Déterminer la mesure principale α de $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$ et la mesure principale β de $(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}})$**

2) **Dans la suite de l'exercice on prendra :**

$x = \frac{\pi}{3}$; $y = \frac{-5\pi}{6}$; $AB = AC = 2\ cm$ et $AD = 3cm$ $\qquad$ **faire une figure**

3) **Déterminer une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}})$, que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$**

4) a) **Construire le point E tel que :**

$(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}}) = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ **et** $AE = 3cm$

b) **Montrer que les points A, C et E sont alignés.**

Exercice 4

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte.

1) $(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) \equiv -\frac{125\pi}{3}\ [2\pi]$ **alors la mesure prinsipale de $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ est :**

a) $-\frac{2\pi}{3}$ $\qquad$ b) $\frac{\pi}{3}$ $\qquad$ c) $\frac{2\pi}{3}$

2) **Soit $(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) \equiv 0\ [2\pi]$ alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont :**

a) colinéaires et de sens contraires b) $\vec{u} \perp \vec{v}$ c) colinéaires et de même sens

3) Soit ABC un triangle isocèle de sommet principale A tel que $(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}) \equiv -\frac{\pi}{5}$

Alors la mesure principale de $(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}})$ est :

a) $\frac{3\pi}{5}$ b) $\frac{\pi}{5}$ c) $-\frac{\pi}{5}$

Exercice 5

- ABC est un triangle rectangle et isocèle en C tel que : $(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$
- ACD est un triangle équilatéral direct
- BCE est un triangle isocèle en B tel que : $(\widehat{\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BC}}) \equiv -\frac{16\pi}{3}[2\pi]$

1) $-\frac{43\pi}{3}$ est-elle une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BC}})$? justifier la réponse.

2) Déterminer la mesure principale de : $(\widehat{\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BC}})$; $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BE}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CE}})$.

3) Montrer que les points C, D et E sont alignés.

4) a) Construire les points F et G tels que : $(\widehat{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AF}}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$ et $(\widehat{\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DG}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

b) Prouver que les droites (AF) et (DG) sont perpendiculaires.

5) Soit $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC et N un point de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ prive des points A et B

Montrer que : $(\widehat{\overrightarrow{NB}, \overrightarrow{NC}}) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

Exercice 6

1) Soit ABC un triangle tel que :

$(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \; ; \; k \in \mathbb{Z}$ et $(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \; ; \; k \in \mathbb{Z}$

a) Calculer $(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}})$

b) Les réels $\frac{101\pi}{6}$ *et* $\frac{-193\pi}{6}$ sont – ils des mesures de $(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}})$

2) a) Construire le triangle ABC

b) Construire le point D tel que BCD soit un triangle équilatéral et

$(\widehat{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}}) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \; ; \; k \in \mathbb{Z}$

c) Calculer $(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{DB}})$

d) Montrer que $ABDC$ est un trapèze rectangle

Exercice 7

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et passant par A. Soient B, C et D trois points du cercle $\mathcal{C}$ tel que :

$(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}}) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \; ; \; k \in \mathbb{Z}$ $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \; ; \; k \in \mathbb{Z}$

$(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD}}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \; ; \; k \in \mathbb{Z}$

1) Construire les points B, C et D

2) Calculer $\left(\widehat{\overrightarrow{AO},\overrightarrow{OC}}\right)$, $\left(\widehat{\overrightarrow{AO},\overrightarrow{BO}}\right)$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OD}}\right)$

3) a) Calculer $\left(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}}\right)$

b) Que peut-on déduire des vecteurs $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$

4) Montrer que les points C et D sont diamétralement opposés

Exercice 8

On considère les points A, B, C et D tel que :

$$\left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}\right) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z} \quad ; \quad \left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CD}}\right) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z}$$

$$\left(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CB}}\right) = \frac{14\pi}{3} + 2k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z}$$

1) Déterminer la mesure principale $\left(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CB}}\right)$

2) Montrer que les points A, C et D sont alignés

3) Déterminer une mesure de chacun des angles orientés : $\left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}}\right)$, $\left(\widehat{-\overrightarrow{BC},3\overrightarrow{AB}}\right)$

Exercice 9

Dans le plan orienté on donne :

$$\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z} \ \text{ et } \ \left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}}\right) = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z}$$

Avec $OA = 3\ cm$; $OB = 2\ cm$ et $OC = 3cm$

1) a) Faire une figure

b) Déterminer la mesure principale de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}}\right)$

c) On donne $\alpha = \frac{23\pi}{6}$; α est-elle une mesure de $\left(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}}\right)$

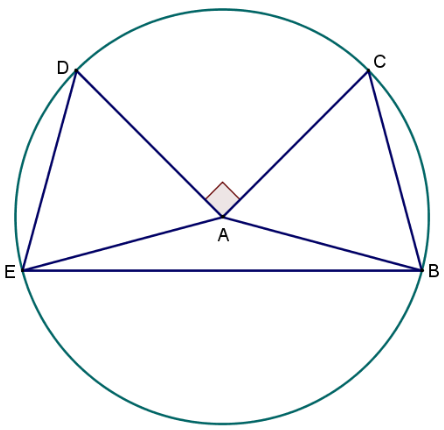
2) Soit $[OD)$ la bissectrice du secteur saillant $[OA, OB]$ on marque le point D tel que $OD = 3\ cm$.

Donner la mesure principale de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OD}}\right)$

3) Montrer que les points O, D et C sont alignés

Exercice 10

On représente ci-contre un cercle de centre A et de rayon 1, les triangles ABC et ADE sont équilatéraux et le triangle ACD est rectangle en A.



1) Déterminer la mesure principale de chacun des angles :

$\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}}\right)$, $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{EB}}\right)$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{DE},\overrightarrow{BC}}\right)$

2) Montrer que $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{EB}$ sont colinéaires.

3) Montrer que $\overrightarrow{EA}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont orthogonaux.

4) Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{ED}}\right) \equiv -\frac{23\pi}{6}$

Exercice 11

On considère un cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$ et soient D_1 et D_2 deux droites parallèles distinctes de la droite (AB) et passant respectivement par A et B.

Soit M un point de $\mathscr{C}$ distinct de A et B, soient $I, J,$ et K les projetés orthogonaux de M respectivement sur (AB) (AB), D_1 et D_2.

1) a) Montrer que les points A, M, I et J sont sur un même cercle que l'on précisera.

b) Montrer que : $(\overrightarrow{JK}, \overrightarrow{JI}) = (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) + 2k\pi \ ; k \in Z$.

2) a) Montrer que les points I, B, M et K sont sur un même cercle que l'on précisera.

b) Montrer que : $\left(\widehat{\overrightarrow{KI}, \overrightarrow{KJ}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BM}}\right) + 2k\pi \, ; k \in \mathbb{Z}$

3) En déduire que le triangle IJK est rectangle en I.

Exercice 12

Soit un triangle ABC et soit $\mathscr{C}$ son cercle circonscrit, soit M un point de $\mathscr{C}$ tel que : $M \notin \{B, C\}$

1) On désigne par A', B', et C' les projetés orthogonales respectifs du point M sur les droites (BC), (AC) et (AB). Faire une figure.

2) a) Montrer que les quatre points A', B', C et M appartiennent à un même cercle que l'on précisera.

b) En déduire que : $\left(\overrightarrow{A'M}, \overrightarrow{A'B'}\right) = \left(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CB'}\right) + \pi + 2k_1\pi \ ; \ k_1 \in \mathbb{Z}$

3) a) Montrer que les quatre points A', B, C' et M appartiennent à un même cercle que l'on précisera.

b) En déduire que : $\left(\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{A'M}\right) = \left(\overrightarrow{BC'}, \overrightarrow{BM}\right) + 2k_2\pi \ ; \ k_2 \in \mathbb{Z}$

4) a) En écrivant : $\left(\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{A'B'}\right) = \left(\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{A'M}\right) + 2k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z}$ et en se rappelant que les points A, B, C et M sont sur le même cercle $\mathscr{C}$ Montrer que :

$\left(\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{A'B'}\right) = \pi + 2k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z}$

b) En déduire que les points A', B', et C' sont alignés.

Exercice 13

Une seule des réponses est exacte. trouver cette réponse.

1) Soit $E = \left\{M \in P / \left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}\right) \equiv \frac{\pi}{6} \ [2\pi]\right\}$

a) E est l'arc $\overset{\frown}{BA}$ privé des points A et B du cercle $\mathscr{C}$ passant par A et B et tangent à (AT) en A tel que : $\left(\widehat{\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}}\right) \equiv \frac{\pi}{6} \ [2\pi]$.

b) E est l'arc $\overset{\frown}{BA}$ privé des points A et B du cercle $\mathscr{C}$ passant par A et B et tangent à (BT) en B tel que : $\left(\widehat{\overrightarrow{BT}, \overrightarrow{BA}}\right) \equiv \frac{\pi}{6} \ [2\pi]$.

c) E est l'arc $\overset{\frown}{BA}$ privé des points A et B du cercle $\mathscr{C}$ passant par A et B et tangent à (BT) en B tel que : $\left(\widehat{\overrightarrow{BT}, \overrightarrow{BA}}\right) \equiv -\frac{\pi}{6} \ [2\pi]$.

Exercice 14

Soient deux points distincts du plan tel que $BC = 6$; on se propose de compléter la construction du triangle ABC tel que: $\left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}}\right) \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

1) **Déterminer l'ensemble Δ des points M tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BM}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$**
2) **Déterminer l'ensemble $\mathcal{C}$ des points M tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MB}}\right) \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$**
3) **En déduire la construction du triangle ABC.**

Exercice 15

Soient A, B et I trois points du plan tel que $AB = 3$ et $4\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

On se propose de construire un triangle ABC tel que : $\left(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$ et $CB = 2CA$

1) **Calculer IA et IB.**
2) **Déterminer l'ensemble $\mathcal{C}_1$ des points M tel que : $\left(\widehat{\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}$**
3) **Déterminer l'ensemble $\mathcal{C}_2$ des points M tel que : $4MA^2 - MB^2 = 0$**
4) **Construire alors le tringle ABC.**

Exercice 16

Soit $ABCD$ un losange de centre I et tel que $AB = 4$ *et* $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{13\pi}{3}\ [2\pi]$

1) **Donner la mesure principale des angles suivants : $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right)$; $\left(\widehat{\overrightarrow{DI},\overrightarrow{DA}}\right)$; $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}}\right)$.**
2) **Calculer $det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$; $det\left(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{BC}\right)$; $det\left(\overrightarrow{ID},\overrightarrow{IA}\right)$; $det\left(\overrightarrow{IB},\overrightarrow{BC}\right)$; $det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{IC}\right)$.**