Dans tous les exercices on suppose que le plan est orienté

Exercice 1

Donner la mesure principale des angles suivants :

$\frac{11\pi}{3}$; $\frac{31\pi}{4}$; $\frac{-15\pi}{2}$; $\frac{37\pi}{5}$; $\frac{-25\pi}{8}$; 313π ; -241π

Exercice 2

Donner la mesure principale de $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ dans chaque cas

$(\widehat{2\vec{u},3\vec{v}}) = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \;;\; k \in \mathbb{Z}$ $\quad$ $(\widehat{-2\vec{u},\vec{v}}) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \;;\; k \in \mathbb{Z}$

$(\widehat{\vec{u},-4\vec{v}}) = -\frac{4\pi}{3} + 2k\pi \;;\; k \in \mathbb{Z}$ $\quad$ $(\widehat{-5\vec{u},-3\vec{v}}) = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \;;\; k \in \mathbb{Z}$

$(\widehat{2\vec{v},3\vec{u}}) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \;;\; k \in \mathbb{Z}$ $\quad$ $(\widehat{-6\vec{v},3\vec{u}}) = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \;;\; k \in \mathbb{Z}$

$\begin{cases} (\widehat{2\vec{u},3\vec{w}}) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \;;\; k \in \mathbb{Z} \\ (\widehat{\vec{w},2\vec{v}}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \;;\; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} (\widehat{\vec{u},-2\vec{w}}) = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \;;\; k \in \mathbb{Z} \\ (\widehat{\vec{w},-3\vec{v}}) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \;;\; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Exercice 3

Soient A, B , C et D des points du plan tel que :

$(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) = \frac{25\pi}{12} + 2k\pi \;;\; k \in \mathbb{Z}$ $\quad$ $(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}}) = \frac{119\pi}{4} + 2k\pi \;;\; k \in \mathbb{Z}$

et $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}}) = -\frac{85\pi}{6} + 2k\pi \;;\; k \in \mathbb{Z}$

1) Déterminer la mesure principale de chacun des angles orientés précédents

$(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$, $(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}})$

2) Montrer que les points A, D et E sont alignés

Exercice 4

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte.

1) $(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) \equiv -\frac{125\pi}{3}\ [2\pi]$ alors la mesure prinsipale de $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ est :

a) $-\frac{2\pi}{3}$ $\qquad$ b) $\frac{\pi}{3}$ $\qquad$ c) $\frac{2\pi}{3}$

2) Soit $(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) \equiv 0\ [2\pi]$ alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont :

a) colinéaires et de sens contraires **b)** $\vec{u} \perp \vec{v}$ **c)** colinéaires et de même sens

3) Soit ABC un triangle isocèle de sommet principale A tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}\right) \equiv -\frac{\pi}{5}$

Alors la mesure principale de $\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right)$ est :

a) $\frac{3\pi}{5}$ b) $\frac{\pi}{5}$ c) $-\frac{\pi}{5}$

Exercice 5

Soient $x = \frac{25\pi}{3}$ et $y = \frac{19\pi}{6}$ deux mesures respectives de deux angles orientés $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}}\right)$

1) Déterminer la mesure principale α de $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)$ et la mesure principale β de $\left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}}\right)$

2) Dans la suite de l'exercice on prendra :

$x = \frac{\pi}{3}$; $y = \frac{-5\pi}{6}$; $AB = AC = 2\ cm\ \ et\ \ AD = 3cm$ faire une figure

3) Déterminer une mesure de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right)$, que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$

4) **a)** Construire le point E tel que

$\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}}\right) = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ et $AE = 3cm$

b) Montrer que les points A, C et E sont alignés.

Exercice 6

1) Soit ABC un triangle tel que :

$\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

a) Calculer $\left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}\right)$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BC}}\right)$

b) Les réels $\frac{101\pi}{6}$ et $\frac{-193\pi}{6}$ sont – ils des mesures de $\left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}\right)$

2) **a)** Construire le triangle ABC

b) Construire le point D tel que BCD soit un triangle équilatéral et

$\left(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}}\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

c) Calculer $\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CD}}\right)$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{DB}}\right)$

d) Montrer que $ABDC$ est un trapèze rectangle

Exercice 7

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et passant par A. Soient B, C et D trois points du cercle $\mathcal{C}$ tel que :

$(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}}) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \; ; \; k \in \mathbb{Z}$ $\quad$ $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \; ; \; k \in \mathbb{Z}$

$(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OD}}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \; ; \; k \in \mathbb{Z}$

1) Construire les points B, C et D

2) Calculer $(\widehat{\overrightarrow{AO},\overrightarrow{OC}})$, $(\widehat{\overrightarrow{AO},\overrightarrow{BO}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OD}})$

3) **a)** Calculer $(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}})$

b) Que peut-on déduire des vecteurs $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$

4) Montrer que les points C et D sont diamétralement opposés

Exercice 8

On considère les points A, B, C et D tel que :

$(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \; ; \; k \in \mathbb{Z}$; $(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CD}}) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \; ; \; k \in \mathbb{Z}$

$(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CB}}) = \frac{14\pi}{3} + 2k\pi \; ; \; k \in \mathbb{Z}$

1) Déterminer la mesure principale $(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CB}})$

2) Montrer que les points A, C et D sont alignés

3) Déterminer une mesure de chacun des angles orientés : $(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}})$, $(\widehat{-\overrightarrow{BC},3\overrightarrow{AB}})$

Exercice 9

Dans le plan orienté on donne :

$(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \; ; \; k \in \mathbb{Z}$ et $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}}) = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \; ; \; k \in \mathbb{Z}$

Avec $OA = 3\ cm$; $OB = 2\ cm$ et $OC = 3cm$

1) **a)** Faire une figure

b) Déterminer la mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}})$

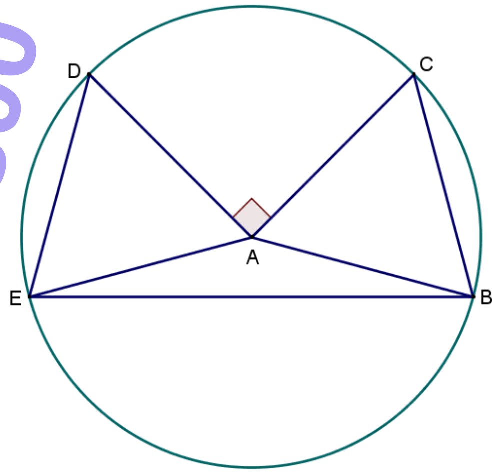
c) On donne $\alpha = \frac{23\pi}{6}$; α est-elle une mesure de $(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}})$

2) Soit $[OD)$ la bissectrice du secteur saillant $[OA\,,OB]$ on marque le point D tel que $OD = 3\ cm$. Donner la mesure principale de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}\,,\overrightarrow{OD}}\right)$

3) Montrer que les points O, D et C sont alignés

Exercice 10

On représenté ci-contre un cercle de centre A et de rayon 1, les triangles ABC et ADE sont équilatéraux et le triangle ACD est rectangle en A.



1) Déterminer la mesure principale de chacun des angles :

$\left(\widehat{\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AE}}\right)$, $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{EB}}\right)$et $\left(\widehat{\overrightarrow{DE}\,,\overrightarrow{BC}}\right)$

2) Montrer que $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{EB}$ sont colinéaires.

3) Montrer que $\overrightarrow{EA}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont orthogonaux.

4) Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{AC}\,,\overrightarrow{ED}}\right) \equiv -\dfrac{23\pi}{6}$

Exercice 11

On considère un cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$ et soient D_1 et D_2 deux droites parallèles distinctes de la droite (AB) et passant respectivement par A et B.

Soit M un point de $\mathscr{C}$ distinct de A et B, soient I, J, et K les projetés orthogonaux de M respectivement sur (AB) (AB), D_1 et D_2.

1) **a)** Montrer que les points A, M, I et J sont sur un même cercle que l'on précisera.

b) Montrer que : $(\overrightarrow{JK}\,,\overrightarrow{JI}) = (\overrightarrow{AM}\,,\overrightarrow{AB}) + 2k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}$.

2) **a)** Montrer que les points I, B, M et K sont sur un même cercle que l'on précisera.

b) Montrer que : $\left(\widehat{\overrightarrow{KI}\,,\overrightarrow{KJ}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{BA}\,,\overrightarrow{BM}}\right) + 2k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}$

3) En déduire que le triangle IJK est rectangle en I.

Exercice 12

Soit un triangle ABC et soit $\mathscr{C}$ son cercle circonscrit, soit M un point de $\mathscr{C}$ tel que :

$M \notin \{B\,,C\}$

1) On désigne par A', B', et C' les projetés orthogonales respectifs du point M sur les droites (BC), (AC) et (AB). Faire une figure.

2) **a)** Montrer que les quatre points A', B', C et M appartiennent à un même cercle que l'on précisera.

b) En déduire que : $\left(\overrightarrow{A'M}, \overrightarrow{A'B'}\right) = \left(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CB'}\right) + \pi + 2k_1\pi$; $k_1 \in \mathbb{Z}$

3) **a)** Montrer que les quatre points A', B, C' et M appartiennent à un même cercle que l'on précisera.

b) En déduire que : $\left(\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{A'M}\right) = \left(\overrightarrow{BC'}, \overrightarrow{BM}\right) + 2k_2\pi$; $k_2 \in \mathbb{Z}$

4) **a)** En écrivant : $\left(\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{A'B'}\right) = \left(\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{A'M}\right) + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ et en se rappelant que les points A, B, C et M sont sur le même cercle $\mathcal{C}$ Montrer que :

$\left(\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{A'B'}\right) = \pi + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

b) En déduire que les points A', B', et C' sont alignés.

Exercice 13

Une seule des réponses est exacte. trouver cette réponse.

1) Soit $E = \left\{M \in P / \left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}\right) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]\right\}$

a) E est l'arc $\overset{\frown}{BA}$ privé des points A et B du cercle $\mathcal{C}$ passant par A et B et tangent à (AT) en A tel que : $\left(\widehat{\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}}\right) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$.

b) E est l'arc $\overset{\frown}{BA}$ privé des points A et B du cercle $\mathcal{C}$ passant par A et B et tangent à (BT) en B tel que : $\left(\widehat{\overrightarrow{BT}, \overrightarrow{BA}}\right) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$.

c) E est l'arc $\overset{\frown}{BA}$ privé des points A et B du cercle $\mathcal{C}$ passant par A et B et tangent à (BT) en B tel que : $\left(\widehat{\overrightarrow{BT}, \overrightarrow{BA}}\right) \equiv -\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$.

Exercice 14

Soient deux points distincts du plan tel que $BC = 6$; on se propose de compléter la construction du triangle ABC tel que: $\left(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}}\right) \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

1) Déterminer l'ensemble Δ des points M tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BM}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

2) Déterminer l'ensemble $\mathcal{C}$ des points M tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MB}}\right) \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

3) En déduire la construction du triangle ABC.

Exercice 15

Soient A, B et I trois points du plan tel que $AB = 3$ et $4\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

On se propose de construire un triangle ABC tel que : $\left(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$ et $CB = 2CA$

1) Calculer IA et IB.

2) Déterminer l'ensemble $\mathcal{C}_1$ des points M tel que : $\left(\widehat{\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}$

3) Déterminer l'ensemble $\mathcal{C}_2$ des points M tel que : $4MA^2 - MB^2 = 0$

4) Construire alors le tringle ABC.

Exercice 16

Soit $ABCD$ un losange de centre I et tel que $AB = 4$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{13\pi}{3}\ [2\pi]$

1) Donner la mesure principale des angles suivants : $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right)$; $\left(\widehat{\overrightarrow{DI},\overrightarrow{DA}}\right)$; $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}}\right)$.

2) Calculer $det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$; $det\left(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{BC}\right)$; $det\left(\overrightarrow{ID},\overrightarrow{IA}\right)$; $det\left(\overrightarrow{IB},\overrightarrow{BC}\right)$; $det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{IC}\right)$.