Correction examen du baccalauréat section mathématiques session principale 2012

Une correction possible proposée par Kooli Mohamed Hechmi

Exercice 1

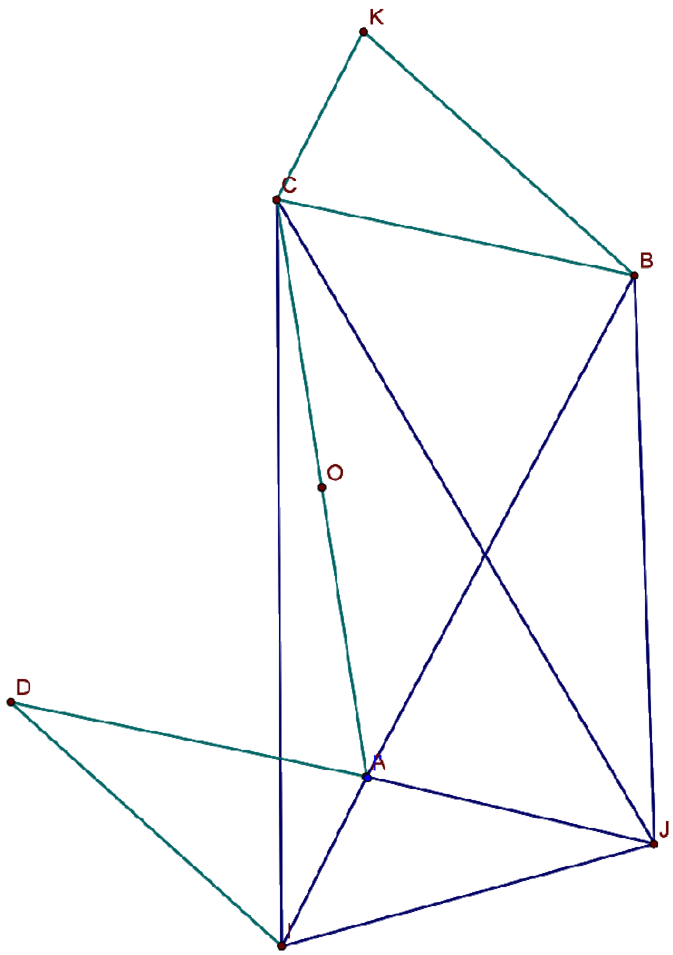
1) On a : $\forall x \in \left[\frac{1}{2}\ ,\ 5\right]$; $f'(x) > 0$ **alors Faux**

2) $\int_1^2 f'(x)\,dx = \ [f(x)]_1^3 = f(3) - f(1) = 1 - 0 = 1$ **alors Vrai**

3) Il existe un réel $x_0 \in [1\ ,\ 2]$ tel que $f'(x_0) = \frac{1}{2}$; alors (C) admet une tangente de coefficient directeur $\frac{1}{2}$ **alors Vrai**

4) On a f est dérivable sur $[1\ ,\ 3]$ et $\forall x \in [1\ ,\ 3]$; $f'(x) \leq 1$
alors d'après le corollaire des inégalités des accroissements finis on a pour tout a et b de $[1\ ,\ 3]$; $|f(b) - f(a)| \leq |b - a|$ **alors Vrai**

Exercice 2



1) a) On a : $\begin{cases} CI = CJ \\ (\overrightarrow{CI}\ ,\overrightarrow{CJ}\ ) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \quad r_C(I) = J$

b) On a : $r_B o\ t(I) = r_B\big(t(I)\big) = r_B(A) = J$ (car $t(I) = A$)

c) On a : r_C est une rotation d'angle $\frac{\pi}{6}$ et $r_B o\ t$ est une rotation d'angle $\frac{\pi}{6}$. Or $r_C(I) = r_B o\ t(I)$ par suite $r_C = r_B o\ t$ (deux rotations de même angle qui coïncident en un point sont égales).

2) On a : $K = t(C)$

On a : $r_C(C) = C$ alors $r_B o\ t(C) = C \Leftrightarrow r_B(K) = C \Leftrightarrow \begin{cases} BC = BK \\ (\overrightarrow{BK}\ ,\overrightarrow{BC}\ ) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi] \end{cases}$

Alors $BC = BK$ et $(\overrightarrow{BC}\ ,\overrightarrow{BK}\ ) \equiv -\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$

3) a) On a $O = A * C \Leftrightarrow \boldsymbol{S_O(A) = C}$ et on a $K = t(C) \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{CK} \Leftrightarrow IAKC$ est un parallélogramme et comme les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leurs milieux alors $O = I * K \Leftrightarrow \boldsymbol{S_O(I) = K}$

D'autre part on a $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{CK} \Rightarrow \boldsymbol{IA = CK}$

On a DIA est un triangle direct isocèle en D et $(\overrightarrow{DI}\ ,\overrightarrow{DA}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$ et on sait que toute symétrie centrale est un déplacement donc S_O transforme DIA en un triangle direct isocèle or BKC est un triangle direct isocèle et $(\overrightarrow{BK}\ ,\overrightarrow{BC}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$

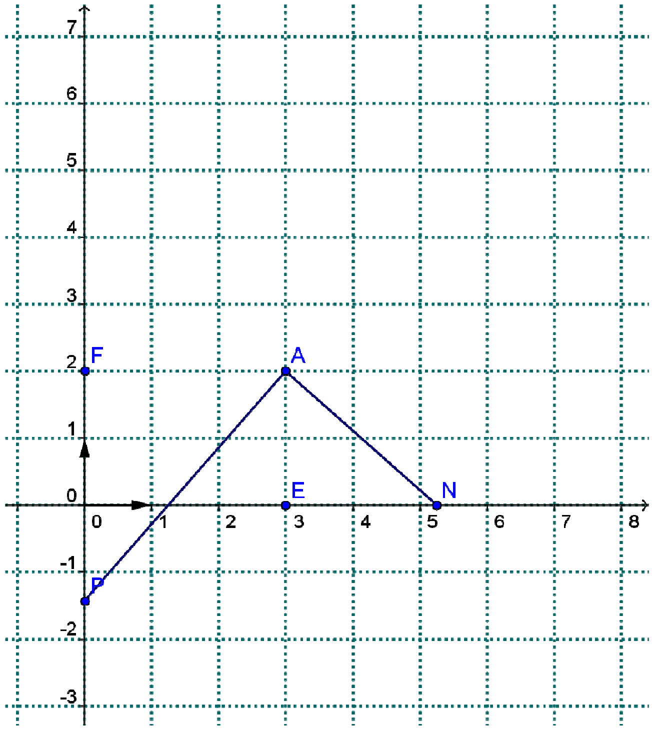
donc d'après ce qui précède : $S_O(A) = C$; $S_O(I) = K$; $IA = CK$

et $(\overrightarrow{DI}\ ,\overrightarrow{DA}) \equiv (\overrightarrow{BK}\ ,\overrightarrow{BC})\ [2\pi]$ alors l'image du triangle DIA par la symétrie centrale de centre O est le triangle BKC.

b) L'image du triangle DIA par la symétrie centrale de centre O est le triangle BKCet $S_O(A) = C$ et $S_O(I) = K$ alors $S_O(D) = B$

De ce qui précède on a $O = A * C$ et $O = D * B$ donc $ABCD$ est un parallélogramme.

Exercice 3



1) a) On a $A \neq E$ et $A \neq F$ alors il existe une unique similitude directe S de centre A qui transforme E en F.

Soit k le rapport de S donc $k = \frac{AF}{AE} = \frac{\sqrt{(-3)^2+0^2}}{\sqrt{0^2(-2)^2}} = \frac{3}{2}$ et soit α une mesure de son angle alors $\alpha \equiv \left(\overrightarrow{AE}\,, \overrightarrow{AF}\right)[2\pi]$ donc $\alpha \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

b) On a $E \in (O\,,\vec{u})$ et S d'angle $-\frac{\pi}{2}$ alors l'image de l'axe $(O\,,\vec{u})$ est la droite perpendiculaire à (OE) et passant par $S(E) = F$ donc l'image de l'axe $(O\,,\vec{u})$ est la droite $(O, \vec{v})$

c) On a $(AN) \perp (AP)$ donc $S\big((AN)\big) = (AP)$ or $N \epsilon (AN) \cap (O\,,\vec{u})$ donc $S(N) \epsilon\, S\big((AN)\big) \cap S((O\,,\vec{u}))$ donc $S(N) \epsilon\, (AP) \cap (O\,,\vec{u}) = \{P\}$ donc $S(N) = P$

d) On S est une similitude directe de centre A de rapport $\frac{3}{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et $S(M) = M'$ donc l'écriture complexe de S et $z' = az + b$ avec $a = \frac{3}{2}e^{-\frac{i\pi}{2}} = -\frac{3}{2}i$ et $z_A = \frac{b}{1-a}$ donc $b = (3+2i)\left(1+\frac{3}{2}i\right) = 3 + \frac{9}{2}i + 2i - 3 = \frac{13}{2}i$

par suite $z' = -\frac{3}{2}iz + \frac{13}{2}i$

2) a) On a N d'abscisse x et $N \in (O\,,\vec{u})$ donc $N(x\,,0)$ donc $z_N = x$ et P d'ordonnée y et $P \in (O\,,\vec{v})$ donc $P(0\,,y)$ donc $z_p = yi$

On a $S(N) = P \Leftrightarrow z_p = -\frac{3}{2}iz_N + \frac{13}{2}i \;\Leftrightarrow\; yi = -\frac{3}{2}ix + \frac{13}{2}i \;\Leftrightarrow\; 2yi = -3ix + 13i$

$\Leftrightarrow (3x + 2y - 13)i = 0$ donc $3x + 2y = 13$

b) Soit l'équation $(E) : 3x + 2y = 13$ on remarque bien que le couple $(3\,,2)$ est une solution de (E) en effet $3 \times 3 + 2 \times 2 = 9 + 4 = 13$

on a donc $3x + 2y = 3 \times 3 + 2 \times 2$ donc $3(x - 3) = 2(-y + 2)$ donc 2 divise $3(x - 3)$ or 3 et 2 sont premier entre eux donc 2 divise $(x - 3)$ il existe donc un entier relatif k tel que $x - 3 = 2k$ donc $x = 2k + 3$ en remplaçant dans $3(x - 3) = 2(-y + 2)$ on a alors $3 \times 2k = 2(-y + 2)$ donc $-y + 2 = 3k$ donc $y = -3k + 2$

D'où $x = 2k + 3$ et $y = -3k + 2$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

<u>vérification</u> si $x = 2k + 3$ et $y = -3k + 2$ avec $k \in \mathbb{Z}$

alors $3(2k + 3) + 2(-3k + 2) = 3 \times 2k + 9 - 2 \times 3k + 4 = 13$

Les solutions de (E) sont $x = 2k + 3$ et $y = -3k + 2$ avec $k \in \mathbb{Z}$

On a $S(N) = P \Leftrightarrow 3x + 2y = 13$ donc les points N et P dont les coordonnées sont entières sont les points $N(2k + 3\,,0)$ et $P(0\,,-3k + 2)$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Exercice 4

1) a) $p(X > 10) = e^{-10\times0{,}125} \approx 0{,}286$

b) 6 mois = 0,5 ans donc $p(X < 0{,}5) = 1 - e^{-0{,}6\times0{,}125} \approx 0{,}060$

2) a) Soit l'événement A : « au moins un oscilloscope ait une durée de vie supérieure à 10 ans »

donc $\overline{A}$: « aucun oscilloscope n' ait une durée de vie supérieure à 10 ans »

donc $\overline{A}$: « tous les oscilloscopes ont une durée de vie inférieure à 10 ans »

$p_1 = p(A) = 1 - p(\overline{A}) = 1 - (1 - 0{,}286)^n = 1 - (0{,}714)^n$

b) $p_1 > 0{,}999 \Rightarrow 1 - (0{,}714)^n > 0{,}999 \Rightarrow (0{,}714)^n < 0{,}001 \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln(0{,}714)^n < \ln 0{,}001 \;\Rightarrow n\ln 0{,}714 < \ln 0{,}001 \;\Rightarrow\; n > \frac{\ln 0{,}001}{\ln 0{,}714}$ (car $\ln 0{,}714 < 0$)

donc $n > 20{,}526$ donc $n = 21$

donc le nombre minimal d'oscilloscopes est 21

Exercice 5

1) a) $f_2(x) = x^2 - \ln x$

$$\lim_{x \to 0^+} f_2(x) = \lim_{x \to 0^+} x^2 - \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f_2(x) = \lim_{x \to +\infty} x^2 - \ln x = \lim_{x \to +\infty} x^2 \left(1 - \frac{\ln x}{x^2}\right) = +\infty$$

Car $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$

b)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f_2(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - \ln x}{x} = \lim_{x \to +\infty} x - \frac{\ln x}{x} = +\infty$$

La courbe (Γ) admet une branche parabolique de direction $(O, \vec{j})$ au voisinage de $+\infty$

c) f_2 est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x \in]0, +\infty[$ $(f_2)'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2-1}{x}$

donc $(f_2)'(x)$ est du signe de $2x^2 - 1$ sur $]0, +\infty[$

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$(f_2)'(x)$	||	$-$		$+$	
$f_2(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{2}(1 + \ln 2)$	$\nearrow$	$+\infty$

2) a) Soit $x > 0$ $M(x, \ln x) \in (L)$ $M_2(x, x^2) \in (C)$

On a $MM_2 = \sqrt{(x-x)^2 + (x^2 - \ln x)^2} = \sqrt{(x^2 - \ln x)^2} = |x^2 - \ln x| = |f_2(x)|$

or d'après **1) c)** $f_2(x) > 0$ donc $MM_2 = f_2(x)$

b) On trace la droite d'équation $x = 2$ elle coupe (L) en M et (C) en M_2, avec le compas on prend la distance MM_2 , puis on met la pointe sèche du compas sur le point de l'axe $(O, \vec{i})$ d'abscisse 2 et avec la mine on fait une trace sur la droite d'équation $x = 2$ de cette manière on a construit le point d'abscisse 2 et appartenant à (Γ), on répète la même chose pour les autres points.

c)