LS EL Alia	***Devoir de synthèse n°3***	***AS : 2021/2022***
Prof: Tlich Ahmed	***(Bac Science 2)***	***Durée: 3h***

Exercice n°1 : (4 points)

Dans le tableau statistique donne le nombre des élèves d'un pays entre 2010 et 2018.X désigne le rang de l'année et Y désigne le nombre des élèves en mille.

Année	2010	2012	2014	2016	2018
Rang x_i	1	2	3	4	5
Nombre d'élèves y_i	20	22	25	29	32

(Dans tout l'exercice les résultats sont données à 10^{-3} prés).

1) a) Déterminer les coordonnées du point moyen du nuage G.

b) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y. Interpréter ce résultat

c) Déterminer une équation de la droite de régression de Yen X.

d) Déterminer le nombre des élèves en 2022.

2) On veut essayer un ajustement exponentiel. On pose $Z = \ln Y$

a) Déterminer une équation de la droite de régression de Z en X.

b) Déduire une écriture de Y sous la forme : $Y = a\,e^{bx}$

c) Déterminer le nombre des élèves en 2022 avec le deuxième ajustement.

d) Au cours de quelle année le nombre des élèves atteindra 80 milles.

Exercice n°2 : (4 points)

Une usine fabrique des robots qui peuvent présenter deux défauts A et B.

On suppose que les deux défauts sont indépendants et que p(A) =0.2 et p(B) =0.3.

Un robot est rejeté s'il présente les deux défauts.

1) Montrer que la probabilité qu'un robot est rejeté égale à 0.06.

2) Un client commande un lot de 10 robots choisies de manière indépendante.

(On suppose que les choix sont assimilés a des tirages successifs et avec remise)

a) Déterminer la probabilité qu'il y ait au moins un robot défectueux.

b) Déterminer la probabilité qu'il y ait aux plus deux robots défectueux.

2) Un deuxième client achète 4 robots On sait que Parmi les 4 robots un seul est défectueux.

Le client va les essayés un par un. Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre des robots essayés jusqu'à ce qu'il trouve le robot défectueux.

On note P_n la probabilité que le client essaye n robots.

a) Montrer que $P_1 = \frac{1}{4}$ et que $P_2 = \frac{1}{4}$

b) Déterminer la loi de probabilité de X.

Exercice n°3 : (7 points)

Soit la fonctions f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = \begin{cases} e^x - xlnx & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

et on note C_f sa courbe dans un repère orthonormé.

1) a) Montrer que f est continue à droite en 0.

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter graphiquement le résultat.

2) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat.

3) Dans l'annexe ci-joint on construit la droite $\Delta: y = x$ et les deux courbes (Γ_g) et (Γ_h) des deux fonctions définies sur $]0,+\infty[$ respectivement par : $g(x) = e^x$ et $h(x) = 1 + lnx$

a) Graphiquement dresser le tableau de signe de $[g(x) - h(x)]$

b) Montrer que $f'(x) = g(x) - h(x)$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

4) a) Etudier la position relative des courbes C_f et (Γ_g)

b) Tracer dans le même repère la courbe C_f.

5) Soit un réel $t\epsilon]0,1]$ et soit A(t) l'aire de la partie du plan limitée par C_f , (Γ_g) et les droites d'équations $x = t$ et $x = 1$.

a) Par une intégration par partie montrer que $A(t) = \frac{1}{2}t^2 lnt - \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{4}$

b) Calculer $\lim\limits_{t\to 0^+} A(t)$.

6) a) Montrer que f réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur$[1,+\infty[$.

b) f^{-1} est-elle dérivable a droite en 1.

c) Tracer dans le même repère la courbe de f^{-1} .

Exercice n°4 : (5 points)

Soit la suite (I_n)définie sur IN par : $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x}\, dx$

1) a) montrer que pour tout $x \in [0,1]$ $on\ a$ $0 \le x^n e^{-x} \le x^n$.

b) Déduire que $0 \le I_n \le \frac{1}{n+1}$ puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

2) a) Par une intégration par partie ; montrer que pour tout n $\in$ IN on a : $I_{n+1} = (n+1)I_n - e^{-1}$.

b) Montrer que $I_0 = 1 - e^{-1}$ puis déduire la valeur I_1.

3) Soit la fonction f définie sur [0, + ∞[par $f(x) = x^2 e^{-x}$ et soit B l'aire de la partie du plan limitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation x=0 et x = 1.

a) Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

b) Montrer que $f'(x) = (2x - x^2)e^{-x}$ puis dresser le tableau de variation de f sur [0, + ∞[.

c) Vérifier que $f(x) = 2xe^{-x} - f'(x)$.

d) Déduire que $B = 2I_1 - f(1)$ puis Calculer B.

Bon travail

<u>**Annexe**</u>