

|                |                              |             |
|----------------|------------------------------|-------------|
| L. S.B. Amri   | Devoir de synthèse N°3       | Sai Fethi   |
| 4 Sc_exp 01-02 | Mathématiques 3 <sup>H</sup> | 09/05 /2008 |

### Exercice 1 (3 points) :

On considère l'équation différentielle (E):  $y' - 2y = e^{2x}$ .

- 1) Vérifier que la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = xe^{2x}$  est une solution de l'équation différentielle (E).
- 2) Résoudre l'équation différentielle (E'):  $y' - 2y = 0$ .
- 3) Montrer que  $f$  est une solution de (E) signifie  $(f-g)$  est une solution de (E').
- 4) En déduire toutes les solutions de (E).
- 5) Déterminer, la fonction  $h$ , solution de (E) qui vérifie :  $h(0) = 1$ .

### Exercice 2 (4 points):

Soient les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2}}$$

$$J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 2}} dx$$

$$K = \int_0^1 \sqrt{x^2 + 2} dx$$

1)

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0 ; 1]$  par  $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 2})$ .

- a) Calculer la dérivée  $f'$  de  $f$ .
- b) En déduire la valeur de  $I$ .

2)

- a) Sans calculer explicitement  $J$  et  $K$ , vérifier que  $J + 2I = K$ .
- b) A l'aide d'une intégration par parties portant sur l'intégrale  $K$ , Montrer que  $K = \sqrt{3} - J$ .
- c) En déduire les valeurs de  $J$  et  $K$ .

### Exercice 3 (5 points):

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{3e^x - 1}{1 + e^x}$ .

(C) la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

- 1) a) Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ :  $f'(x) = \frac{4e^x}{(1+e^x)^2}$ .  
b) Dresser le tableau de variation de  $f$ .
- 2) a) Montrer que  $A(0,1)$  est un centre de symétrie pour (C).  
b) Ecrire une équation de la tangente  $T$  à (C) en  $A$ .  
c) Montrer que  $A$  est un point d'inflexion de (C).  
d) Déterminer l'intersection de (C) et l'axe des abscisses.
- 3) Construire la courbe (C). (Unité graphique 2 cm).
- 4) a) Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  sur un intervalle  $J$  que l'on déterminera.  
b) Expliciter  $f^{-1}(x)$  pour tout  $x \in J$ .

**Exercice 4 (4 points):**

Pour dater les ossements d'animaux préhistoriques, on utilise couramment la méthode "carbone14". On admet que tant que l'animal est vivant, la quantité de carbone 14 dans son organisme est constante et qu'elle est égale à 100. Après la mort de l'animal, la quantité de carbone 14 diminue progressivement. On donne le tableau suivant:

|                                                        |    |    |    |    |    |
|--------------------------------------------------------|----|----|----|----|----|
| Age des ossements<br>( $t_i$ )<br>en milliers d'années | 6  | 10 | 12 | 15 | 18 |
| Quantité de carbone<br>restante ( $y_i$ )              | 48 | 30 | 23 | 16 | 11 |

- 1) a) Représenter le nuage des points de la série  $(t_i, y_i)$ .  
b) Calculer  $\bar{t}$  et  $\bar{y}$ .  
c) Déterminer la covariance de t et y:  $\text{cov}(t, y)$ .  
d) Donner une équation de la droite de régression de y en t.
- 2) On pose:  $x_i = \text{Log} t_i = \ln(t_i)$ .  
a) Présenter dans un tableau la série  $(x_i, y_i)$ , en prenant pour  $x_i$  une valeur approchée à 0,01 par défaut.  
b) Calculer le coefficient de corrélation  $r'$  de cette série.  
c) Donner une équation de la droite de régression de y en x de cette série.

**Exercice 5 (4 points:  $8 \times 0,5$ ):**

A) Un appareil de mesure évalue l'épaisseur (en cm) de pièces mécaniques.

L'expérience prouve que l'épaisseur des pièces peut être modélisée par une variable aléatoire X qui suit la loi uniforme dans l'intervalle  $[0;1]$ .

Répondre par vrai ou faux.

1)  $P(X = 0,6) = \frac{1}{6}$ .

2)  $P(0,3 \leq X \leq 0,5) = 0,2$ .

- 3) Les pièces sont acceptées si leur épaisseur est supérieure à 0,6.  
La probabilité qu'une pièce soit acceptée est égale à 0,4.

- 4) Une pièce a une épaisseur supérieure à 0,3 cm.  
La probabilité qu'elle soit acceptée est égale à 0,3.

B) Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = xe^{-x}$ .

1)  $\forall x \in \mathbb{R} : f(x)f(-x) \leq 0$

2)  $\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) \leq e^{-1}$

3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$

4)  $\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) + f(x) = e^{-x}$

**BON TRAVAIL**

Réponses aux questions des : Vrai –Faux.

Nom : .....

Prénom : .....

Classe : 4SC .....

N° : .....

|          |          |                            |                            |
|----------|----------|----------------------------|----------------------------|
| <b>A</b> | <b>1</b> | V <input type="checkbox"/> | F <input type="checkbox"/> |
|          | <b>2</b> | V <input type="checkbox"/> | F <input type="checkbox"/> |
|          | <b>3</b> | V <input type="checkbox"/> | F <input type="checkbox"/> |
|          | <b>4</b> | V <input type="checkbox"/> | F <input type="checkbox"/> |
| <b>B</b> | <b>1</b> | V <input type="checkbox"/> | F <input type="checkbox"/> |
|          | <b>2</b> | V <input type="checkbox"/> | F <input type="checkbox"/> |
|          | <b>3</b> | V <input type="checkbox"/> | F <input type="checkbox"/> |
|          | <b>4</b> | V <input type="checkbox"/> | F <input type="checkbox"/> |

***BON TRAVAIL***