Lycée de Souassi * * * **DEVOIR DE SYNTHESE N° 3** * * * 14/05/2010	**SECTIONS :** 4ème *Sciences Expérimentales* **1** **EPREUVE :** *Mathématiques* **DUREE :** 3 *heures* **PROFESSEUR :** *Mr Wissem Fligène*

<u>EXERCICE N° 1</u>: (3 points)

Pour chacune des questions ci-dessous, <u>une seule</u> des réponses proposées est exacte.
L'exercice consiste à recopier sur la copie cette réponse exacte <u>sans justification</u>.

1- On considère l'équation différentielle (E): $2y' - 3y = 6$. Une fonction f solution de (E) est :

$f(x) = e^{\frac{3}{2}x} + 2$	$f(x) = e^{-\frac{3}{2}x} - 2$	$f(x) = \frac{2}{3}e^{\frac{3}{2}x+1} - 2$

2- Les solutions de l'équation différentielle $9y'' + \pi^2 y = 0$ sont les fonctions f définies par :

$f(x) = A\sin\left(\frac{\pi}{3}x\right) + B\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)$; $(A,B) \in \mathbb{R}^2$	$f(x) = A\sin\left(\frac{\pi}{3}x\right)$; $A \in \mathbb{R}$	$f(x) = B\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)$; $B \in \mathbb{R}$

3- Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètre n et $\frac{1}{4}$. Alors :

$p(X = 0) = \frac{1}{4^n}$	$p(X = n) = \frac{1}{2^{2n}}$	$E(X) = 0{,}75n$

4- Soit Y une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre 0,01 alors :

La densité de probabilité de Y est la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = e^{-0{,}01x}$	$p(1 \le Y \le 2) = e^{-0{,}02} - e^{-0{,}01}$	Pour tout réel strictement positif x, $p(Y \le x) = 1 - e^{-0{,}01x}$

<u>EXERCICE N° 2</u>: (4 points)

Soit la fonction définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par $f(x) = \ln(1 + xe^{-x})$
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal. La courbe $\mathscr{C}$ est représentée en annexe (**à rendre avec la copie**)

<u>Partie I</u>

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
2) Justifier que pour tout réel positif, le signe de $f'(x)$ est celui de $(1 - x)$
3) Etudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0,+\infty[$

<u>Partie II</u>

Soit λ un nombre réel strictement positif. On pose

$$A(\lambda) = \int_0^{\lambda} f(x)dx$$

1) Représenter, sur l'annexe jointe (à rendre avec la copie), la partie du plan dont l'aire en unité d'aire, est égale à $A(\lambda)$
2) a) Calculer à l'aide d'une intégration par parties $\int_0^{\lambda} xe^{-x}\,dx$ en fonction de λ
   b) On admet que pour tout nombre réel positif u, $\ln(1 + u) \le u$
   Démontrer alors que, pour tout nombre réel λ strictement positif, $A(\lambda) \le -\lambda e^{-\lambda} - e^{-\lambda} + 1$
   c) Trouver alors un majorant de $A(5)$

<u>EXERCICE N° 3</u>: (4 points)

Soit l'équation différentielle (E) : $y' + y = x$; où y désigne une fonction dérivable de la variable réelle x et y' sa dérivée.

1. Résoudre l'équation différentielle (H) : $y' + y = 0$
2. Déterminer les deux nombres réels a et b tels que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = ax + b$ est solution de l'équation (E).
3. a) Le nombre k désignant une constante réelle, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = ke^{-x} + x - 1$$
   Vérifier que la fonction f est solution de l'équation (E).
   b) Déterminer le réel k pour que $f(0) = 0$.
4. Dans cette question, on prend $k = 1$.
   a) Calculer la valeur moyenne m de f sur l'intervalle$[0,2]$.
   b) En déduire une valeur approchée de m à 10^{-2} près.

<u>EXERCICE N° 4</u>: (5 points)

On dispose de deux dés cubiques dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Ces dès sont en apparences identiques mais l'un est bien équilibré et l'autre truqué. Avec le dé truqué la probabilité d'obtenir 6 lors d'un lancer est égale à $\frac{1}{3}$

Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1- On lance le dé bien équilibré trois fois de suite et on désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de 6 obtenus.
   a. Quelle loi de probabilité suit la variable aléatoire X ?
   b. Quelle est son espérance ?
   c. Calculer $P(X = 2)$.

2- On choisit au hasard l'un des deux dés, les choix étant équiprobables. Et on lance le dé choisi trois fois de suite. On considère les évènements D et A suivants :
   - D : « le dé choisi est le dé bien équilibré » ;
   - A : « obtenir exactement deux 6 ».
   a. Calculer la probabilité des évènements suivants :
   - « choisir le dé bien équilibré et obtenir exactement deux 6 » ;
   - « choisir le dé truqué et obtenir exactement deux 6 ».
   (On pourra construire un arbre de probabilité).
   b. En déduire que : $p(A) = \frac{7}{48}$
   c. Ayant choisi au hasard l'un des deux dés et l'ayant lancé trois fois de suite, on a obtenu exactement deux 6. Quelle est la probabilité d'avoir choisi le dé truqué ?

3- On choisit au hasard l'un des deux dés, les choix étant équiprobables, et on lance le dé n fois de suite (n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2).
   On note B_n l'évènement « obtenir au moins un 6 parmi ces n lancers successifs ».
   a. Déterminer, en fonction de n, la probabilité p_n de l'évènement B_n.
   b. Calculer la limite de la suite (p_n). Commenter ce résultat.

<u>EXERCICE N° 5</u>: (4 points)

Le tableau suivant donne le produit national brut (PNB) X(en dinars, par habitants) ainsi que le nombre d'hôpitaux Y(pour 1 million d'habitants) dans quelques pays africains.

Pays	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8
X	5100	7800	11200	15800	20100	22500	26200	28900
Y	620	1080	1550	2100	3000	3250	3800	4200

En annexe (**à rendre avec la copie**) on a représenté le nuage de point de cette série. On a pris comme origine du repère le point (5000,600)

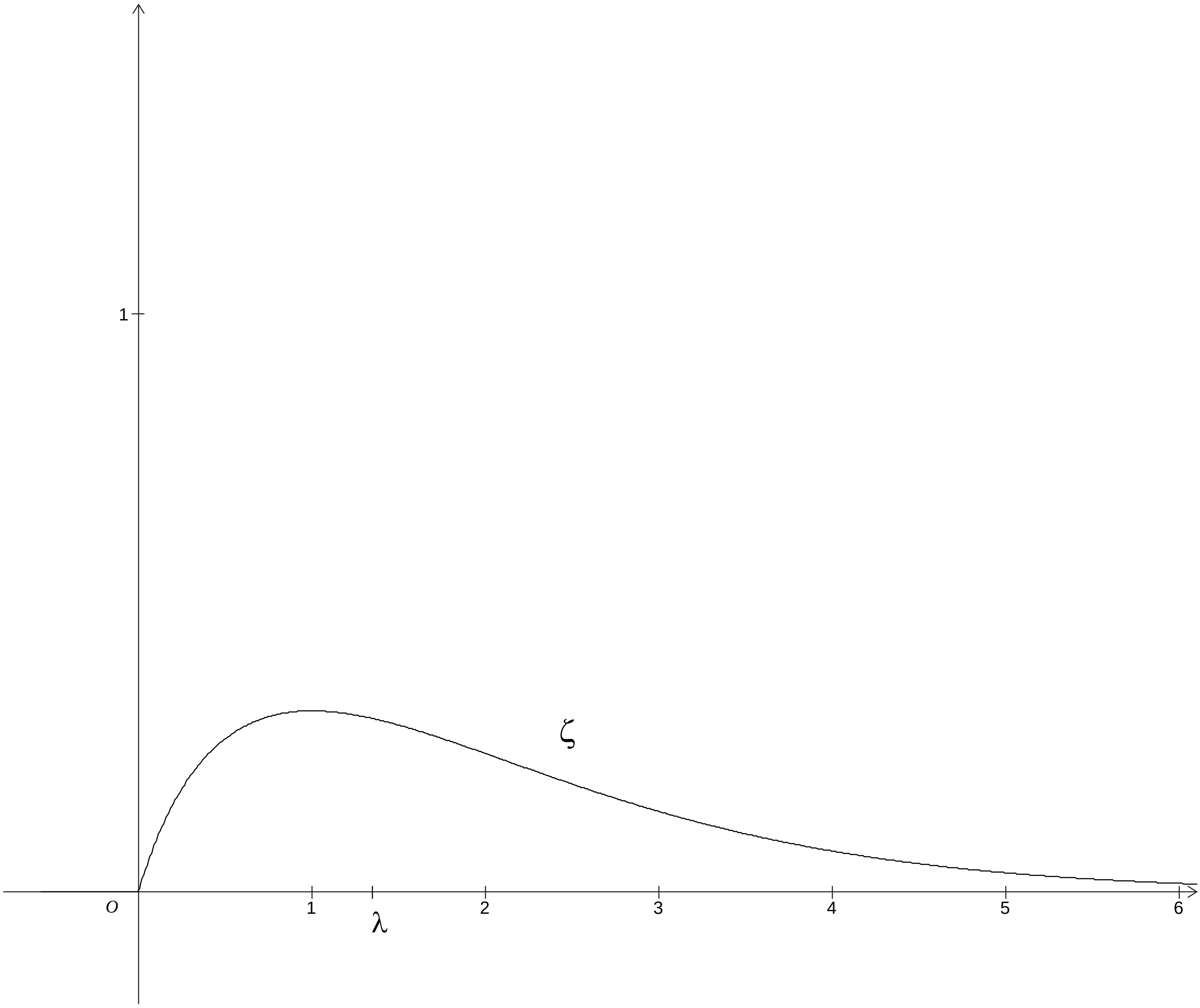
1- Déterminer les coordonnés du point moyen G de ce nuage de points. Placer G sur le graphique
2- Déterminer le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y. Un ajustement affine est-il justifié ?
3- Un premier ajustement affine : la droite de Mayer
   Dans cette question, on partage le nuage de points en deux sous nuages de points moyens respectifs G_1 et G_2
   a) Calculer les coordonnées G_1 et G_2 et placer les sur le graphique
   b) Donner une équation de la droite (G_1G_2) sous la forme $y = mx + p$ (on arrondira m à 10^{-2} prés et p à l-unité près)
      Représenter cette droite sur le graphique
4- Un deuxième ajustement affine : la droite de régression
   Déterminer une équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés. On notera D cette droite. Représenter D sur le graphique.
5- Estimation :
   a) Un pays a un PNB de 23400 dinars par habitant. Quelle estimation peut-on faire du nombre d'hôpitaux (par million d'habitant) dans ce pays ? (on arrondira à l'unité près)
   b) Un pays a 3500 hôpitaux par million d'habitant. A combien peut-on estimer son PNB (en dinars, par habitant) ? (on arrondira aux dinars près)

Annexe

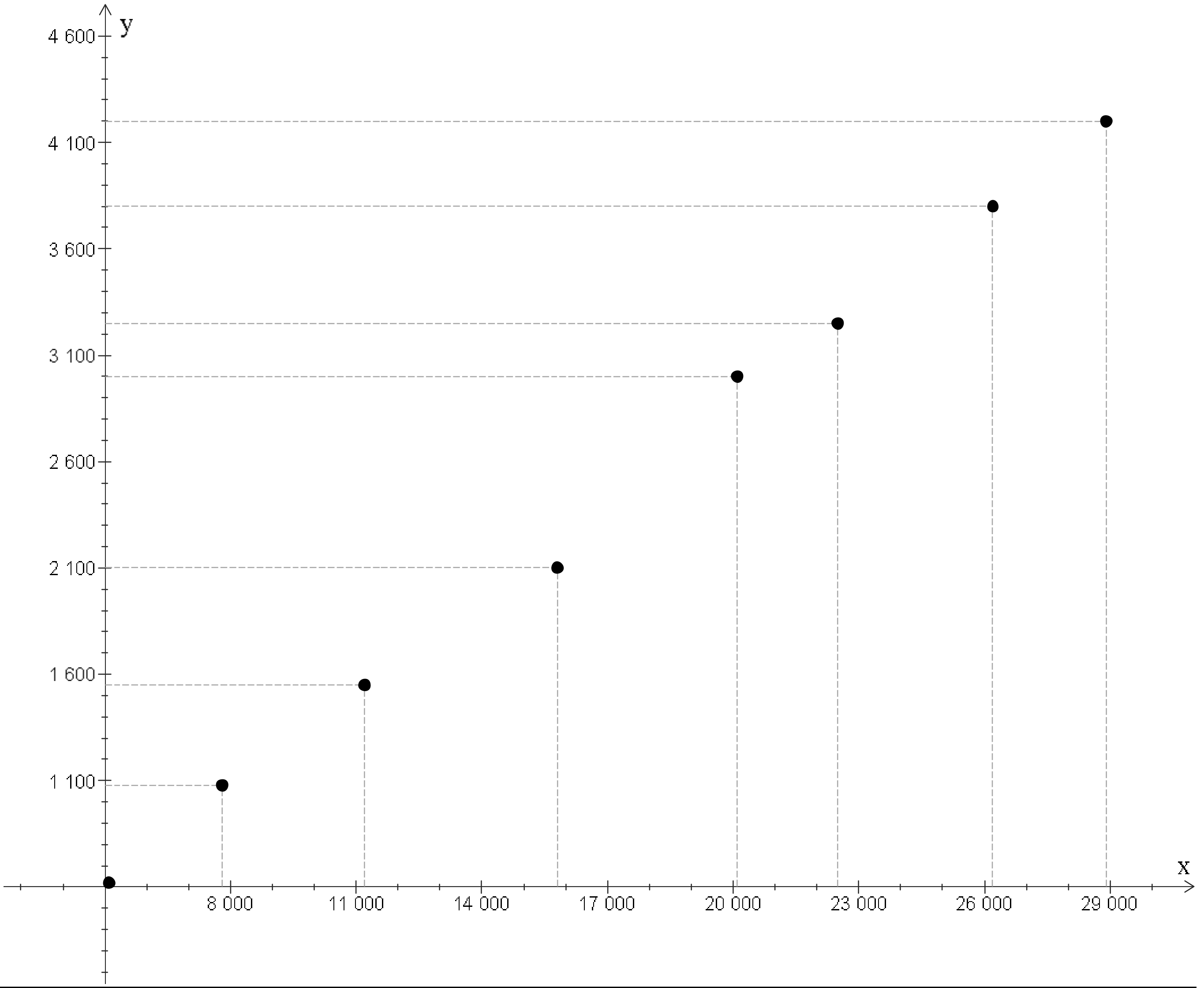
(à rendre avec la copie)

Nom :   Prénom :

<u>EXERCICE N° 2</u>:



EXERCICE N° 5:


y
4 600
4 100
3 600
3 100
2 600
2 100
1 600
1 100
x
8 000
11 000
14 000
17 000
20 000
23 000
26 000
29 000