2010/2011	Devoir de synthèse (Bac blanc)	El ouerfelli anoir
Ibn hazem	4^{emme}sc-exp	Durée : 3 h

EXERCICE N° 1 (3pts) : * Cocher la réponse exacte sans justification

1. Le nombre complexe $\frac{\sqrt{3}+i}{i}$ à pour argument

a/ $-\frac{\pi}{3}$ b/ $\frac{\pi}{6}$ c/ $-\frac{\pi}{6}$

2.Si z est un nombre complexe tel que $|z|=3$ alors $\bar{z}$ est égale à :

a/ $\frac{3}{z}$ b/ $\frac{9}{z}$ c/ $\frac{\sqrt{3}}{z}$

3. Le module du nombre complexe $-2(1+i)e^{ix}$; $x \in IR$ est

a/ $-2\sqrt{2}$ b/ 2 c/ $2\sqrt{2}$

** Répondre par vrai – faux sans justification

1. Si z_0 est solution de l'équation ($\mathcal{E}$) : $z^3 - 19z + 3 = 0$ alors $\overline{z_0}$ est aussi solution de ($\mathcal{E}$)

2. $-2e^{i\frac{\pi}{6}}$ est Une racine carrée de $4e^{i\frac{\pi}{3}}$

3. Si $z = e^{ix}$ alors $-z = e^{-ix}$

EXERCICE N ° 2 (5 pts) : L'espace est muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

1.Soit l'ensemble $S = \{M(x,y,z) \text{ tel que : } x^2+y^2+z^2+2x-4y+2z-3=0\}$

Montrer que S est la sphère de centre $I(-1,2,-1)$ et de rayon $r = 3$

2.a. Vérifier que $A(-3,1,1)$ est un point de S

b. Déterminer une équation cartésienne du plan P tangente à S en A

3. Soit Q le plan médiateur du segment $[AI]$ et K le milieu de $[AI]$

a . Vérifier qu'une équation cartésienne du plan Q est $Q : 2x+y-2z+\frac{5}{2}=0$

b . Montrer que l'intersection du plan Q et de la sphère est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon

c . Déterminer une équation cartésienne de la sphère S' tangente à P et Q respectivement en A et K

EXERCICE N 3 (6 pts) : On considère la fonction f définie sur IR par : $f(x) = ln(1+e^{-x}) + \frac{1}{3}x$

On désigne par © sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$

1.a. Déterminer $\lim_{+\infty} f$

b. Montrer que la droite $D : y = \frac{1}{3}x$ est une asymptote à la courbe © au voisinage de $+\infty$

c. Etudier la position relative de © et D

2. Montrer que pour tout $x \in IR$ on a $f(x) = ln(e^x + 1) - \frac{2}{3}x$. En déduire $\lim_{-\infty} f$

3. a. Montrer pour tout $x \in IR$ on a $f'(x) = \frac{e^x - 2}{3(e^x+1)}$

b. Dresser le tableau de variation de f

4. Tracer ©

5. Pour tout entier naturel non nul n , on pose $v_n = \int_0^n \ln(1 + e^{-x})\, dx$

a. Donner une interprétation géométrique de cette intégral

b. Soit $t \in]0, +\infty[$, montrer que $\frac{1}{1+t} < 1$. En déduire que $ln(1 + e^{-x}) < e^{-x}$ pour tout $x \in IR$

c. Montrer alors que pour tout entier naturel non nul n on a $v_n < 1$

d. Montrer que la suite (v_n) est croissante .En déduire qu'elle est convergente

<u>EXERCICE N° 4 (5pts) :</u> Soit la suite (I_n) définie pour tout entier $n \geq 1$ par : $I_n = \int_1^e ln^n(x)\, dx$

1.a. Calculer I_1

b. Montrer que la suite (I_n) est décroissante

c. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ on a $0 \leq I_n \leq e - 1$. En déduire que la suite I_n est convergente

2.a. En remarquant que $ln^n(x) = x \cdot \frac{1}{x} ln^n(x)$ montrer que pour tout $n \geq 1$ on a :

$$I_{n+1} = e - (n + 1) I_n$$

b. En déduire que pour tout $n \geq 1$ on a $\frac{e}{n+2} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$

c. Déduire alors $\lim_{+\infty} I_n$