

Exercice1 (4,5 points)

Les réponses seront présentées dans la feuille à rendre (page3)

A) Vrai ou Faux

Soit f la fonction définie sur $] -e ; e[$ par $(x) = \ln\left(\frac{e-x}{e+x}\right)$. On désigne par (C) sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Répondre par vrai ou faux aux assertions suivantes sans présenter de justification.

- La fonction f est impaire.
- (C) n'admet aucune asymptote verticale.
- $\forall x \in] -e ; e[; f'(x) = \frac{-2e}{e^2 - x^2}$.

B) Questionnaire à choix multiples : Pour chacun des énoncés suivants une seule réponse est exacte. Aucune justification n'est exigée.

1) Soit l'intégrale $I = \int_{-1}^1 \ln(1 + |x|) dx$

- $I < 0$.
- $I = 0$.
- $I = \ln\left(\frac{16}{e^2}\right)$.

2) Soit $f(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$. La limite de f en $+\infty$ est égale à :

- 0
- 1
- $+\infty$

3) Soit (S) la sphère de centre $A(2,4,0)$ et tangente au plan $P: x + y + z - 3 = 0$. Soit Q le plan dont une équation cartésienne est : $x - y + z + 1 = 0$. (S) et Q sont :

- disjoints.
- sécants suivant un cercle.
- tangents

Exercice2 (3,5 points)

Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par la relation de récurrence :
$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = U_n - \ln(U_n^2 + 1) \end{cases}$$

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - \ln(x^2 + 1)$.

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = x$.
- Etudier le sens de variation de f sur $[0, 1]$. En déduire que : Si $(x \in [0, 1])$ alors $(f(x) \in [0, 1])$.

2) a) Montrer ,par récurrence ,que : pour tout $n \in \mathbb{N} ; U_n \in [0, 1]$.

- Montrer que $(U_n)_n$ est décroissante .
- En déduire que $(U_n)_n$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice3 (6points)

Dans la figure (I) de la feuille à rendre , on a représenté une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$.

- La droite $\Delta : y = x - 1$ est une asymptote en $+\infty$ à la courbe de f .
- La droite $D : y = -1$ est une asymptote en $-\infty$ à la courbe de f .
- (AB) est la tangente à la courbe de f au point $A(0 ; \ln 2 - 1)$.On donne $B(2 ; \ln 2)$.

Partie A

Dans cette partie les réponses demandées seront basées sur la lecture graphique .

1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 1)]$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{f(x)+1}$.

2) a) Donner $f(0)$ et $f'(0)$.

b) En déduire l'équation réduite de (AB) .

3) Dresser le tableau de variation de f .

Partie B

On donne $f(x) = (x - 1) + \ln(a + e^{-bx})$.

1) En utilisant les résultats de la question (A/2/a), vérifier que : $a = 1$ et $b = 1$.

2) a) Montrer que $f(x) = -1 + \ln(e^x + 1)$.

b) Retrouver alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

3) On définit, sur $]0 ; +\infty[$, la fonction F par : $F(x) = \int_0^{\ln x} f(t) dt$. Montrer que F est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et $\forall x > 0 ; F'(x) = \frac{1}{x} (-1 + \ln(x + 1))$.

Exercice 4 (6 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1) On considère les points $A(3,1,0)$; $B(1,2,0)$; $C(3,2,1)$ et $D(0,0,d)$ où d est un réel positif ou nul.

a) Déterminer les composantes du vecteur $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

b) En déduire l'aire $\mathcal{A}$ du triangle ABC .

c) Déterminer une équation cartésienne du plan P passant par les points A ; B et C .

2) On note H le projeté orthogonal du point D sur le plan P .

a) Déterminer en fonction de d les coordonnées du point H .

b) Déterminer la distance DH et montrer que le volume du tétraèdre $ABCD$ est : $\mathcal{V} = \frac{2d+5}{6}$.

c) Déterminer la valeur de d pour laquelle la droite (DB) est perpendiculaire au plan P .

3) Soit (S_d) la sphère de centre D et passant par B .

a) Déterminer une équation cartésienne de (S_d) .

b) Déterminer, suivant les valeurs de d , l'intersection de (S_d) et P .

Feuille à rendre avec la copie

Nom : Prénom : Classe :

Réponses de l'exercice 1

A)

Question	Vrai ou Faux
a)	
b)	

B)

Enoncé	Réponse
1)	
2)	

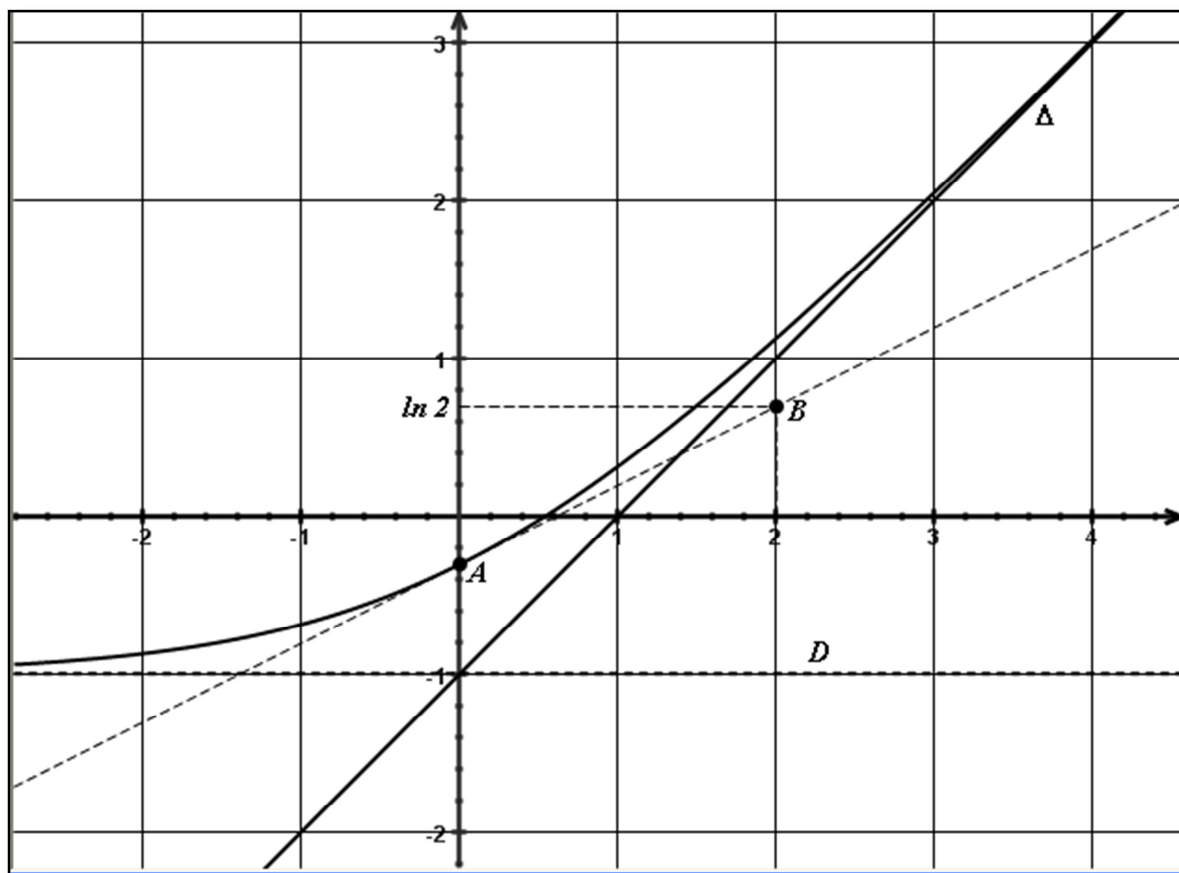


Figure 1