Lycée secondaire ALI BOURGUIBA		2009 - 2010
Épreuve : Mathématiques	Devoir de synthèse n° 3	Durée : 4H
Prof : MAATALLAH	Le 13 - 05 - 2010	Classe : 4 M

EXERCICE N° 1 (3 points)

Dire vrai ou faux en justifiant la réponse:

1/ Un feu tricolore de circulation reste 55 secondes au vert , 5 secondes à l'orange et 60 secondes au rouge. Un piéton traverse à ce feu entre 8 h 00 et 8 h 05. A 8 h 00, ce feu se met au rouge. On appelle T la variable aléatoire qui donne, en secondes, le temps écoulé entre 8 h 00 et l'heure d'arrivée devant ce feu du piéton qui souhaite traverser. On admet que T suit une loi uniformément répartie sur l'intervalle [0 ; 300].

a) La densité de probabilité associée à T est la fonction f ainsi définie :

$f(t)=\frac{1}{3}$ si $t\in[0\,;60[$ ou si $t\in[120\,;180[$ ou si $t\in[240\,;300[$; $f(t)=0$ dans les autres cas.

b) La probabilité que le piéton attende moins de 10 secondes est $\frac{2}{3}$.

c) Entre 8 h 00 et 8 h 05, 10 piétons se présentent à ce feu tricolore. La probabilité que 3 d'entre eux exactement aient attendu moins de 10 secondes est $\frac{2^3}{3^{10}}$.

2/ La durée de vie d'un appareil, exprimée en années, jusqu'à ce que survienne la première panne est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre 0,1. Alors :

a) $P(X>6)=e^{-0,6}$.

b) $P(X\le 5)=P(X\ge 5)$.

c) $P(X\le 6/X\ge 3)=P(X\le 3)$

EXERCICE N° 2(3 points)

Le tableau suivant donne le nombre annuel de véhicules vendus les cinq premières années de commercialisation :

Année	2000	2001	2002	2003	2004
Rang de l'année : xi	0	1	2	3	4
Nombre annuel de véhicules vendus en milliers : yi	81,3	92,3	109,7	128,5	131,2

1/ a) Représenter le nuage de points associé à cette série statistique .Déterminer les coordonnées du point moyen G.

b) Déterminer et construire la droite de régression de Y en X. Estimer le nombre de véhicules vendus en 2008.

2/ Le tableau suivant donne le nombre annuel de véhicules vendus, exprimé en milliers, de 2004 à 2008 :

Année	2004	2005	2006	2007	2008
Rang de l'année : xi	4	5	6	7	8
Nombre annuel de véhicules vendus en milliers : yi	131,2	110,8	101,4	86,3	76,1

a) Compléter le nuage de points précédent à l'aide de ces valeurs. L'ajustement précédent est-il encore adapté ?

b) On ajuste le nuage de points, par une courbe d'équation : $y = e^{cx+d}$.

Déterminer les réels c et d pour que cette courbe passe par les points $(4\,;131{,}2)$ et $(8\,;76{,}1)$.

3/ Soit f la fonction définie sur l'intervalle [4 ; 10] par : $f(x)=e^{-0,136x+5,421}$

On suppose que f modélise en milliers l'évolution du nombre annuel de véhicules vendus à partir de 2004.

a) Dresser le tableau de variation de f sur [4 ; 10].Tracer la courbe (C) de f dans le même repère que le nuage de points.

b) L'entreprise décide d'arrêter la fabrication du modèle l'année où le nombre annuel de véhicules vendus devient inférieur à 65 000. Résoudre l'inéquation : $f(x)\le 65$. En quelle année l'entreprise doit-elle prévoir cet arrêt ?

EXERCICE N° 3 (4 points)

A/ Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse .

a) Pour tout entier naturel n, 3 divise le nombre $2^{2n}-1$.

b) Si un entier relatif x est solution de l'équation : $x^2+x\equiv 0$ (modulo 6) alors $x\equiv 0 (mod 3)$

c) L'ensemble des solutions de l'équation $12x - 5y = 3$ est l'ensemble des couples $(4 + 10k\,;\, 9 + 24k)$ où $k\in\mathbb{Z}$.

d) Il existe un couple (a ; b) de nombres entiers naturels tel que a < b et PPCM (a ; b) – PGCD (a ; b) = 1 .

B/ 1/ a) Déterminer le reste de la division euclidienne de 2009^2 par 16.

b) En déduire que $2009^{8001} \equiv 2009 (mod 16)$.

2/ On considère la suite (U_n) définie sur ℕ par : $U_0 = 2009^2 - 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = (U_n + 1)^5 - 1$

a) Démontrer que U_0 est divisible par 5.

b) Démontrer $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = U_n[{U_n}^4 + 5({U_n}^3 + 2{U_n}^2 + 2U_n + 1)]$

c) Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, U_n est divisible par 5^{n+1}.

d) Vérifier que $U_3 = 2009^{250} - 1$ puis en déduire que $2009^{250} \equiv 1$ (modulo 625).

e) Montrer que $2009^{8001} \equiv 2009$ (modulo 625) et que $2009^{8001} - 2009$ est divisible par 10000.

EXERCICE N° 4 (4 points)

On dispose d'une urne U_1 contenant 1boule blanche et 3 boules noires et d'une urne U_2 contenant 3 boules blanches , 2 boules noires et une boule rouge .

- On choisit au hasard une urne :

■)Si c'est U_1 , on y tire une par une et avec remise 3 boules .

■■) Si c'est U_2 , on y tire une par une et sans remise 4 boules .

1/ a) calculer la probabilité de l'événement A : « on obtient 2 boules blanches » .

b) Soit X l'aléa numérique qui , après un tirage , indique le nombre de boules blanches obtenues .

Etablir la loi de probabilité de X .

c) Déduire la probabilité de l'événement B : « Il reste dans l'urne choisie une seule boule blanche » .

2/ L'urne choisie étant U_2 et le tirage étant comme auparavant , on considère le jeu suivant :

■) Après un tirage , les boules blanches obtenues seront éliminées dans U_1 et les autres seront remises dans U_2 .

■■) On répète le tirage de U_2 , dans ces conditions , dans l'objectif de vider toutes les boules blanches de U_2 dans U_1 .

■■■)Si l'objectif est réalisé au plus au $2^{ième}$ tirage , on gagne $\frac{N}{i}$ dinars (i est le numéro du tirage qui achève le jeu) .
Sinon , le jeu s'arrête et on perd N^2 dinars .

a) Soit Y le gain algébrique d'un joueur .

- Etablir la loi de probabilité de Y .
- Déterminer N pour que ce jeu soit équitable .Pour quelles valeurs de N ce jeu devient défavorable ?

b) Le jeu étant équitable , 5 personnes se présentent à ce jeu .Soit Z la variable aléatoire qui indique le nombre de personnes gagnantes .

- Calculer $P(Z \leq 4)$. Calculer $E(Z)$ et $V(Z)$.
- Calculer la probabilité de l'événement C : « La somme gagnée par quatre joueurs et supérieure à 20 dinars » .

EXERCICE N° 5(6 points)

Soit u et v deux fonctions dérivables sur ℝ . (C) et (Γ) sont leurs courbes dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ représentées dans la page 3 .

1/ On admet que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, $\frac{u'(x)}{v'(x)} > -1$. Soit f la fonction définie par : $f(x) = u(x) + v(x)$ et (C_f) sa courbe dans le même repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

a) Montrer que (C) est nécessairement la courbe de u .

b) Etudier , à l'aide du graphique , les branches infinies de (C_f) et le signe de $f'(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

c) Dresser le tableau de variation de f . Construire (C_f) et préciser la tangente T à (C_f) au point d'abscisse 0

2/ On considère l'équation différentielle (E): $2y' - y = 4e^{\frac{x}{2}}$. Soit g une fonction dérivable sur ℝ et $\forall x \in \mathbb{R}$:
$\varphi(x) = g(x)e^{-\frac{x}{2}}$.

a) Déterminer les fonctions φ de sorte que g soit une solution de (E) .

b) *En déduire la solution* h *de* (E) *telle que :* $h(0) = 0$.

c) *On admet que* $f = P \circ h$ *avec* P *un polynôme du second degré . Montrer que* $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $P(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x$.

d) *Montrer par le calcul que 0 est l'unique solution dans* $\mathbb{R}$ *de l'équation :* $f(x) = 0$.

3/ a) *Dresser le tableau de variation de* $F: x \mapsto \ln|f(x)|$.

b) *Montrer que :* $F(x) = 0$ *admet dans* $]0, +\infty[$ *une solution unique* α *et établir que :* $e^{\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{6}-2}{2\alpha}$

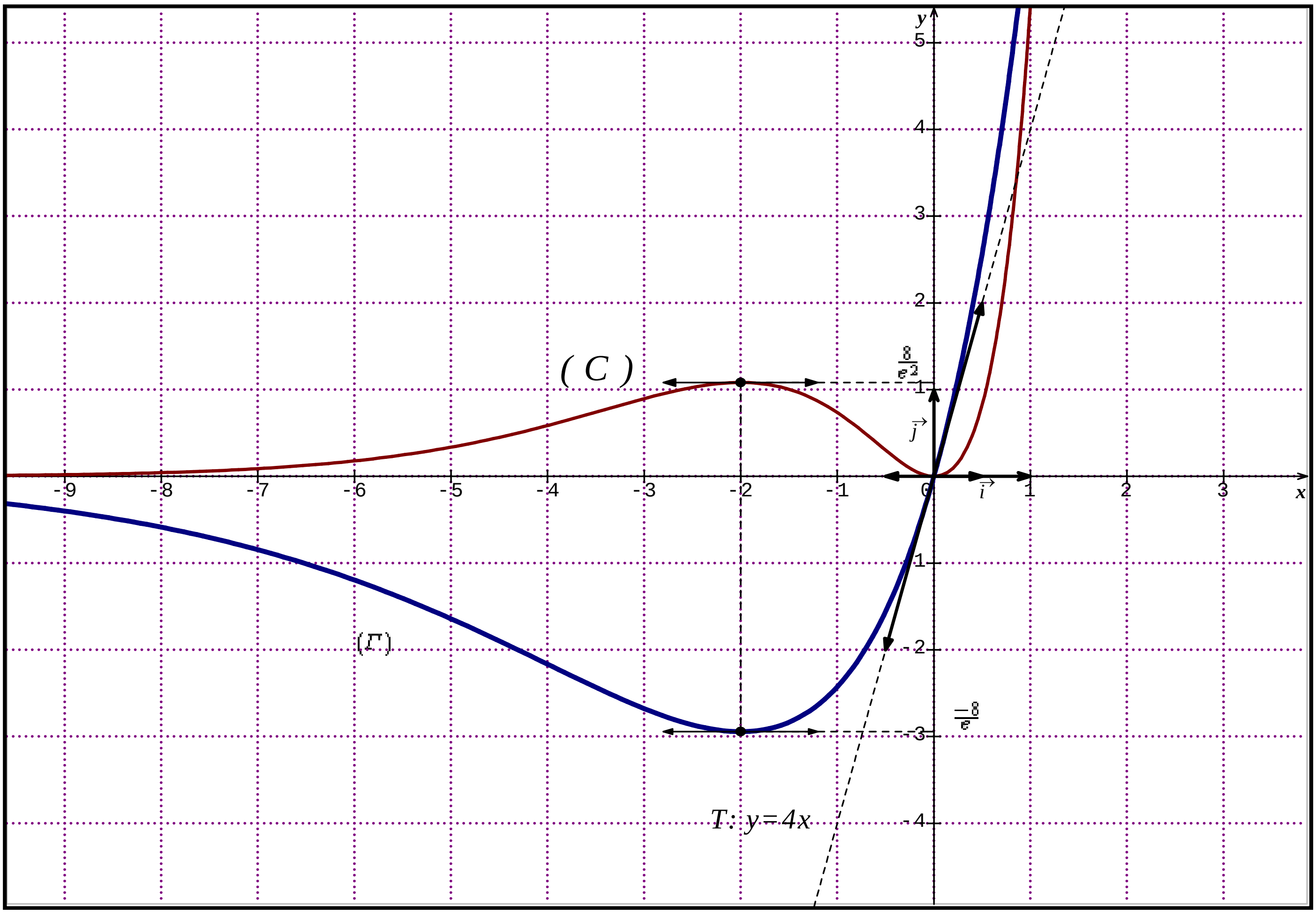
4/ *Soit* n *un entier naturel supérieur ou égal à 3 et* (U_p) *la suite définie sur* $\mathbb{N}^*$ *par :* $U_p = \int_{\frac{-1}{n}}^{-\ln(n)} f(t)e^{-\frac{1}{tp}}dt$.

a) *Montrer que* $\forall\, x \in]0, \frac{1}{e}[$, $x + \ln(x) < 0$. *Déduire que* $\forall\, p \in \mathbb{N}^*$, $U_p \geq 0$.

b) *Etudier la monotonie de* (U_p) *et déduire qu'elle converge . Soit* I_n *sa limite .*

c) *Montrer que* $\forall\, p \in \mathbb{N}^*$, $\int_{\frac{-1}{n}}^{-\ln(n)} f(t)e^{\frac{1}{p\ln(n)}}dt \leq U_p \leq \int_{\frac{-1}{n}}^{-\ln(n)} f(t)e^{\frac{n}{p}}dt$ *et déduire* I_n .

d) *Calculer* I_n *en fonction de* n . *Calculer* $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ *et interpréter graphiquement le résultat .*



Bonne chance et excellente réussite au Baccalauréat