REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION Lycée Jammel 3 - Monastir		Mr : Afli Ahmed Devoir de Synthèse n°3 08-05-2014	
SECTION :	Mathématiques		
EPREUVE :	MATHEMATIQUES	DUREE : 4h	COEFFICIENT : 4

N.B : La qualité de la rédaction, la numérotation des pages et le respect de l'ordre des questions, constituent un élément déterminant dans l'appréciation de la copie

Exercice 1 : (3points)

Répondre par vrai ou Faux à chacune des propositions suivantes, en justifiant votre réponse

1. / Pour tout n∈IN : $2^n+3^n \equiv 5^n$(mod6)

2. / $x^2 + x + 3 \equiv 0[5]$ si et seulement si $x \equiv 1[5]$

3. / Pour tout entier premier p strictement supérieur à 3, on a : $6\times2^{p-2} \equiv 3$ (modulo p)

4. /Si $\begin{cases} x \equiv 4[5] \\ y \equiv 5[8] \end{cases}$ alors 8x-5y = 7 ; x et y deux entiers

Exercice 2 : (3points)

Le tableau suivant indique le teneur de l'aire en dioxyde de carbone(CO_2) observé depuis le début de l'ère industrielle. la variable X désigne le rang de l'année et Y la teneur en CO_2

Année	1850	1900	1950	1990
Rang X de l'année	0	50	100	140
Teneur en CO_2	275	290	315	350

1. a. Représenter le nuage des points de cette série (X,Y)
   b. Déterminer une équation de la droite de régression de Y en X par la méthode des moindres carrées.
   c. En utilisant cet ajustement, donner une estimation de la teneur en CO_2 pour l'année 2014.
2. La forme du nuage des points permet d'envisager un ajustement exponentiel, pour cela on pose Z = ln(Y-250)
   a. Reproduire et compléter le tableau suivant :

Rang X de l'année	0	50	100	140
Z				

   b. Calculer le coefficient de corrélation linéaire de la série (X,Z).Interpréter le résultat obtenu.
   c. Déterminer une équation de la droite de régression de Z en X
   d. Selon ce modèle, quelle teneur en CO_2 peut-on estimer pour l'année 2014 ?

Exercice 3 : (5points)

Soit n un entier naturel non nul. Soit f_n la fonction définie sur [1,+∞[par : $f_n(x) = \frac{\sqrt{\ln x}}{x^n}$

On désigne par (C_n) la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

1. a- Etudier la dérivabilité de f_n en 1. Interpréter graphiquement le résultat.

   b -Dresser le tableau de variation de f_n

   c- Etudier la position relative des courbes C_{n+1} et C_n. Tracer (C_1)et (C_2)

2. Soit a un réel de]1,+∞[. Calculer une mesure de l'aire I(a) de la partie du plan limitée par (C_1)et les droites : $(O, \vec{i})$, x = 1 et x = a.

3. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sqrt{\ln(1+\frac{k}{2n})}}{k+2n}$.

   a- Montrer que pour tout k ∈ {0, 1, 2, ..., n − 1}, on a :

$$\frac{1}{2n} f_1\left(1+\frac{k}{2n}\right) \leq \int_{1+\frac{k}{2n}}^{1+\frac{k+1}{2n}} f_1(x)\,dx \leq \frac{1}{2n} f_1\left(1+\frac{k+1}{2n}\right).$$

   b- En déduire que : $S_n - \frac{1}{2n} f_1\left(\frac{3}{2}\right) \leq I\left(\frac{3}{2}\right) \leq S_n$ et que : $I\left(\frac{3}{2}\right) \leq S_n \leq I\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2n} f_1\left(\frac{3}{2}\right)$.

   c- Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Exercice 4 : (5points)

Soit f la fonction définie sur $I =]-\ln 2, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2e^x - 1}}$.

(C_f) désigne la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

1. a- Dresser le tableau de variation de f.

   b- Préciser l'équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 0.

   c- Tracer (T) et (C_f).

2. Soit g la fonction définie sur $]0, \pi[$ par : g(x) =$g(x) = -\ln(1+\cos x)$

   a- Montrer que g réalise une bijection de $]0, \pi[$ sur I.

   b- Soit $h = g^{-1}$. Montrer que h est dérivable sur I et que h'(x) = f.

   c- Calculer alors l'air de la partie du plan limitée par (C_f) et les droites d'équations x = 0 ; y = 0 et x = ln2.

3. Soit (E) l'ensemble des fonctions dérivables, strictement positives sur les intervalles de la forme : D = $]a, +\infty[$; $a \in IR$ et solution de l'équation différentielle : $y + y^3 = -2y'$

   a- Vérifier que f appartient à (E).

   b- On pose $z(x) = \frac{1}{Y^2(x)}$ avec y ∈ (E). Montrer que z est dérivable sur D et que $z'(x) = z(x) + 1$.

   c- Montrer alors qu'il existe $k \in IR_+^*$ tel que $y(x) = \frac{1}{\sqrt{k\,e^x - 1}}$; $x \in]-\ln k, +\infty[$.

Exercice 5 : (4points)

I-Dans une usine qui fabrique des ampoules électrique on considère un lot contenant 7 ampoules réparties comme suit :

- **4 ampoules de 100 volts dont 3 qui émettent une lumière blanche et une qui émet une lumière rouge.**
- **3 ampoules de 75 volts dont 1 qui émet une lumière blanche et 2 qui émettent une lumière rouge.**

Un client veut acheter trois ampoules .Il les choisie au hasard et simultanément du lot .
Soit X la variable aléatoire qui indique le nombre d'ampoules qui émettent une lumière blanche.

1- **Déterminer la loi de probabilité de X. Calculer E(X) et V(X)**
2- **Calculer la probabilité que le client obtient 3 ampoules de même ampérage sachant qu'elles émettent toutes en blancs.**

II-On estime qu'une ampoule a une durée de vie moyenne de 300jours. On suppose que la variable T qui représente la durée de vie d'une ampoule suit une loi exponentielle de paramètre λ et on admet que l'espérance mathématiques de T est E(T) = $\frac{1}{\lambda}$.
On choisit une ampoule au hasard

1- **Déterminer λ.**
2- **Calculer la probabilité que l'ampoule ne soit pas grillée au bout d'une année.**
3- **Sachant que l'ampoule n'est pas grillée au bout d'une année, qu'elle est la probabilité qu'elle n'est pas encore grillée au bout de deux ans.**

Bonne Chance et Bonne Révision