Devoir de synthèse n°3 en mathématiques

Durée : 3 heures

- ***Exercice 1 :*** ***(8 points)***

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.
On considère les points $A(3,0,0)$; $B(1,0,1)$ et $C(2,1,1)$.

1) a/ Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
 b/ Calculer la distance du point C à la droite (AB) et déduire l'aire du triangle ABC.
 c/ Donner un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$ passant par les points A, B et C.
 Déduire qu'une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est : $\boldsymbol{x-y+2z-3=0}$.
 d/ Donner une représentation paramétrique de la droite Δ passant par A et perpendiculaire à $\mathcal{P}$.

2) Soit $D(5-2t\,,-4\,,3+t)$; $t\in IR$
 a/ Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$ pour $t=0$.
 b/ Retrouver l'aire du triangle ABC.
 c/ Montrer que pour tout $t\in IR$ le volume du tétraèdre $ABCD$ est constant.
 d/ Sur quelle ligne fixe varie le point D lorsque t varie ?

3) Soit S l'ensemble des point $M(x,y,z)$ de l'espace vérifiant $\boldsymbol{x^2+y^2+z^2-4x-2y+4z-2=0.}$
 a/ Montrer que S est une sphère dont on précisera le centre I et le rayon R.
 b/ Vérifier que le point I appartient à Δ.
 c/ Montrer que S et $\mathcal{P}$ sont sécants selon un cercle $\mathcal{C}$ passant par B.
 Préciser le centre et le rayon du cercle $\mathcal{C}$.

4) Pour tout $m\in IR$, on considère le plan $\mathcal{P}_m$ d'équation $\boldsymbol{mx-y+2mz-3m=0}$
 a/ Montrer que pour tout $m\in IR$, la droite (AB) est incluse dans $\mathcal{P}_m$.
 b/ Montrer que pour tout $m\in IR$, S et $\mathcal{P}_m$ sont sécants.
 c/ Déterminer m pour que $S\cap\mathcal{P}_m$ soit un cercle de rayon $\sqrt{11}$

- ***Exercice 2 :*** ***(6 points)***

Soit la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $\boldsymbol{f(x)=\sqrt{3x}}$
La courbe de f et la droite $\Delta: y=x$ sont tracées dans un repère orthonormé en annexe.

On considère la suite (u_n) définie sur IN par : $\begin{cases}\boldsymbol{u_0=a\in[1,3]}\\ \boldsymbol{u_{n+1}=\sqrt{3u_n}}\end{cases}$

1) a/ Pour quelle valeur de a la suite (u_n) est-elle constante ?
 b/ Dans la suite on fixe $\boldsymbol{u_0=1}$
 Représenter les cinq premiers termes de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses.
 c/ Que peut-on conjecturer sur la convergence de (u_n) ?
2) a/ Montrer que pour tout $n\in IN$, $u_n\in[1,3]$.
 b/ Montrer que la suite (u_n) est monotone.
 c/ Si (u_n) converge , calculer sa limite L.

3) Soit la suite (v_n) définie sur IN par $v_n = 3 - u_n$

a/ Vérifier que $v_{n+1} = \sqrt{3}\,\frac{3-u_n}{\sqrt{u_n}+\sqrt{3}}$

b/ Montrer que pour tout $n \in IN$, $v_{n+1} \leq \frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} v_n$

c/ Déduire que pour tout $n \in IN$, $v_n \leq 2\left(\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)^n$

d/ Retrouver alors L.

4) Pour $n \in IN^*$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$ et $w_n = \frac{S_n}{n}$

a/ Montrer que pour tout $n \in IN^*$, $S_n \geq 3n + \left(2 + 2\sqrt{3}\right)\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)^n - 1\right)$

b/ Déduire que (w_n) est convergente.

- ***<u>Exercice 3 :</u> (6 points)***

Une urne U contient 4 boules noires, 2 boules blanches et 2 boules jaunes.
Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

1) On tire successivement sans remise trois boules de l'urne.
   On considère les événements suivants :

A « Obtenir trois boules de trois couleurs différentes »
B « La première boule blanche tirée est obtenue au deuxième tirage »
C « Le nombre de boules blanches obtenues est supérieur à celui des boules noires »

Calculer la probabilité de chacun des événements $A, B, C, A \cup B$ et $B \cap C$

2) On dispose d'un dé tétraédrique équilibré dont les faces sont numérotées : **0 , 1 , 1 , 2**

Un jeu consiste à lancer le dé deux fois de suite et noter à chaque lancé le numéro inscrit sur la face cachée puis effectuer le produit P des deux numéros obtenus.

- Si P est nul alors on tire simultanément deux boules de l'urne U.
- Sinon on tire une première boule de l'urne U, on la remet en ajoutant une boule de même couleur puis on tire une deuxième boule de l'urne.

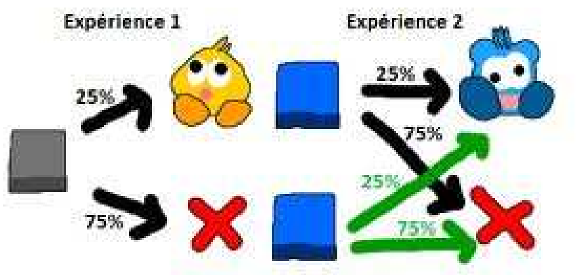
La condition de gagner est d'obtenir une boule jaune et une boule noire.

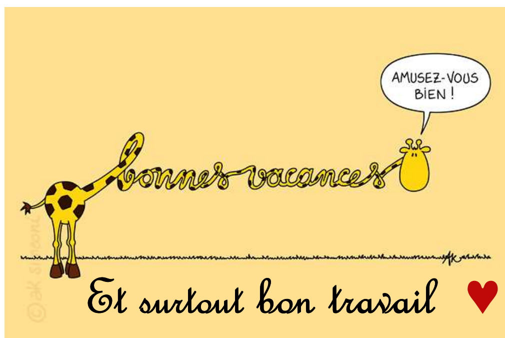
a/ Calculer la probabilité de l'événement : E « $P = 0$ »

b/ Montrer que la probabilité de gagner est égale à 0,25.

c/ On choisit un gagnant au hasard, quelle est la probabilité qu'il ait obtenu $P = 0$.

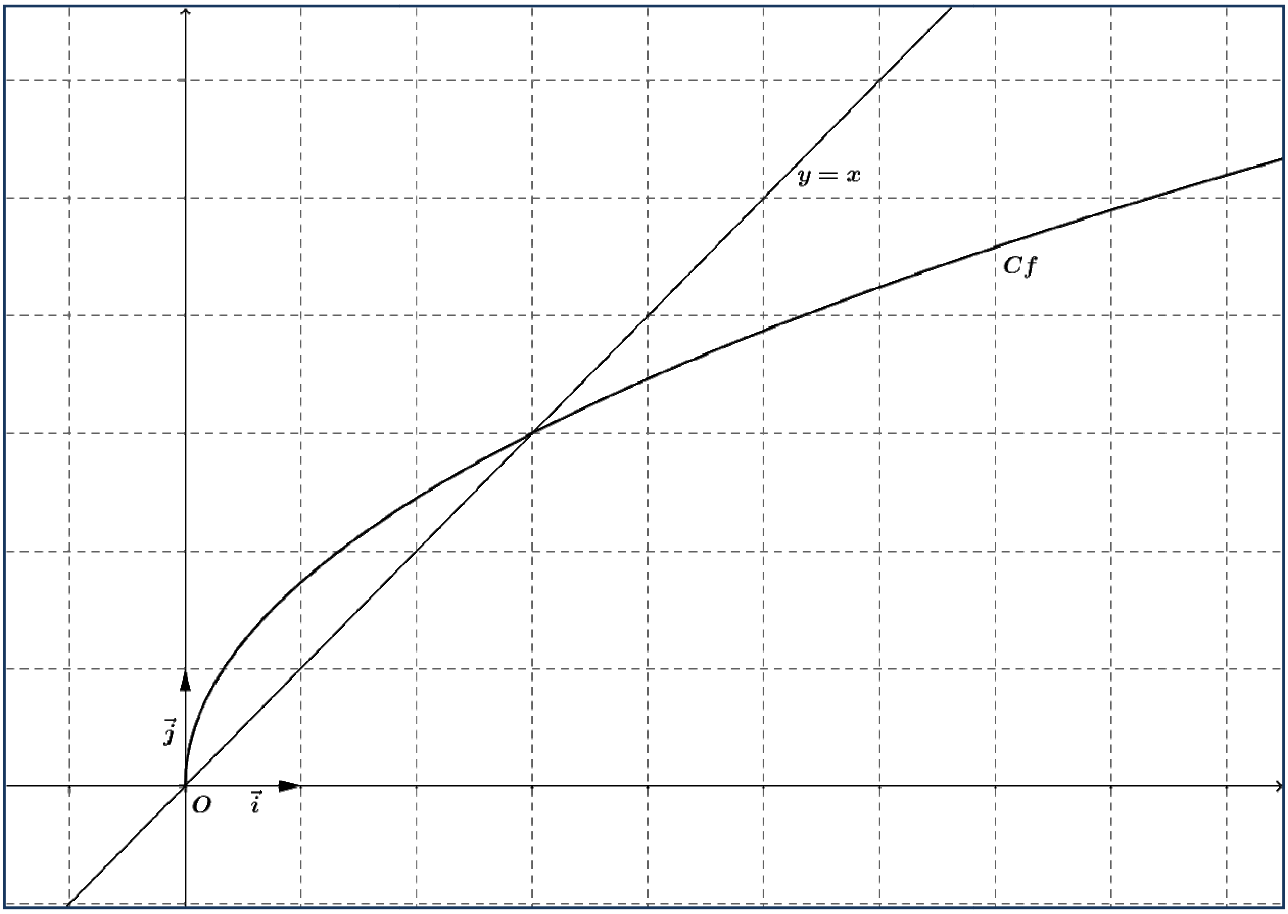
http://mathematiques.kooli.me/





Nom et prénom : . . . .

Annexe à rendre



http://mathematiques.kooli.me/