C.R.E. : Tunis-1 et Sfax-1	Devoir de synthèse N°3		Niveau : $4^{ème}$ Sc. Tech.
Date : 10 / 05 / 2024	Mathématiques	Coefficient : 3	Durée : 3 h

Noter bien : • Il sera tenu compte de la rigueur et de la clarté des réponses.
• Aucun document n'est autorisé, sauf, une calculatrice non programmable.

Exercice N°1: **(4,5 points).**

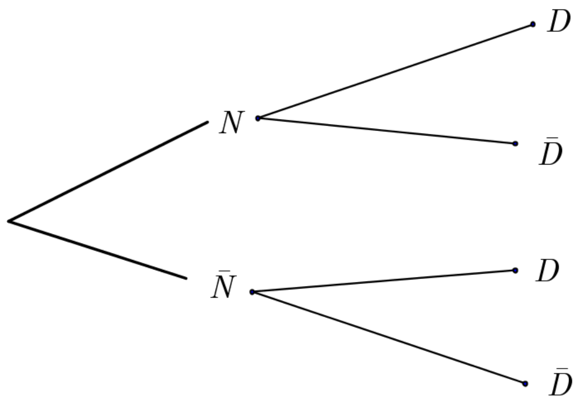
♦ Les parties (I) et (II) sont indépendantes.

► **(I)** Une usine utilise, pour la production des agrafeuses, deux chaînes dont l'une est plus nouvelle et très fiable que l'autre. Ainsi, dans la production totale on a relevé :

- 75% des agrafeuses proviennent de la nouvelle chaîne.
- 18% des agrafeuses provenant de l'ancienne chaîne sont défectueuses.
- 2% des agrafeuses provenant de la nouvelle chaîne sont défectueuses.

On prélève au hasard une agrafeuse dans la production totale, et on considère les évènements :
N : «L'agrafeuse provient de la nouvelle chaîne» et D : «L'agrafeuse est défectueuse »

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré de probabilités ci-contre.
2. Montrer que $p(D) = 0,06$
3. Sachant que l'agrafeuse est conforme, quelle est la probabilité qu'elle provienne de la nouvelle chaîne de fabrication ? (On donnera le résultat sous forme de fraction irréductible).
4. La vente de ces agrafeuses se fait par lot de 10 pièces. Un client achète un lot. Quelle est la probabilité qu'au moins une des agrafeuses de ce lot soit défectueuse ?



► **(II)** On admet que la durée de vie exprimée en années, de chaque agrafeuse avant le premier défaut est une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre λ où λ est un réel strictement positif.
Une étude statistique du service de contrôle a permis d'établir que la probabilité qu'une agrafeuse présente un défaut pendant la première année d'utilisation est égale à $0,117$

1. En arrondissant le résultat à 10^{-3} près, montrer que $\lambda = 0,124$
2. Estimer la probabilité qu'une agrafeuse dure plus de deux ans ?
3. Déterminer, à une année près, la durée de vie moyenne de ces agrafeuses ?

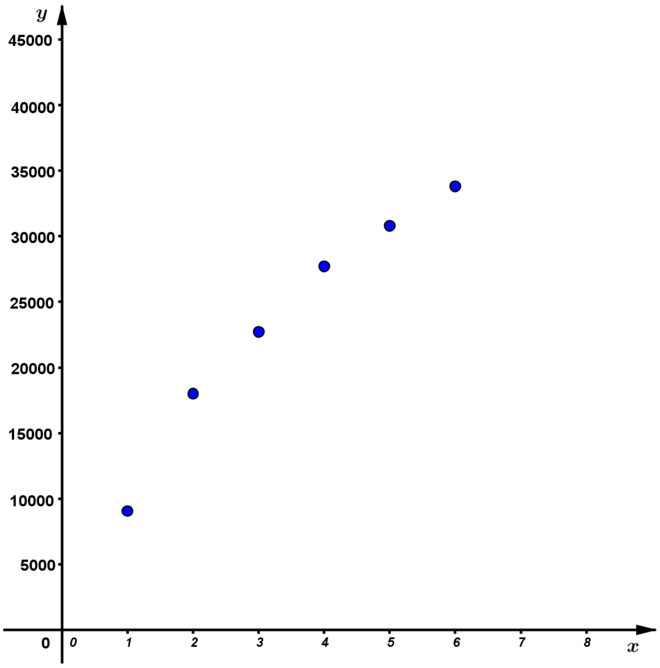
Exercice N°2: **(4 points).**

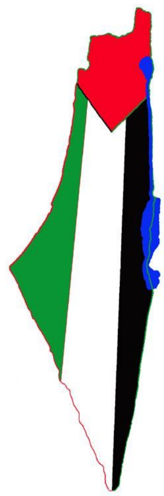
► Les résultats seront arrondis à l'unité sauf indication contraire.

♦ Depuis le 7 octobre 2023 l'armée de l'occupation israélienne mène dans la bande de GAZA une "guerre de génocide" : (Crime contre l'humanité tendant à la massacre totale ou partielle d'un groupe national, ethnique, racial ou religieux).

♦ Le tableau statistique ci-dessous donne le nombre de Martyrs palestiniens en fonction du nombre de mois à partir du 7 octobre. (Source : Le ministère de la santé de GAZA).

Nombre de mois : x	1	2	3	4	5	6
Nombre de Martyrs : y	9061	17997	22722	27708	30800	33886





1 **a** Déterminer le coefficient de corrélation linéaire r entre X et Y arrondi à 10^{-3} prés.

b Un ajustement affine de la série (x, y) à court terme est-il approprié ? Justifier.

c Déterminer une équation de la droite D de régression de Y en X par les moindres carrés.

d Estimer le nombre de Martyrs palestiniens si ce massacre se prolonge un mois de plus.

2 L'allure du nuage permet d'envisager un ajustement logarithmique.
On admet que $y = 8595 + 13772 \ln x$

a En utilisant cet ajustement, donner une estimation du nombre de Martyrs palestiniens si cette tuerie dure un mois de plus.

b Le ministère de la santé de GAZA annonce qu'au 7ème mois de cette guerre le nombre de Martyrs palestiniens s'élève à 34622. Lequel de deux ajustements est le plus pertinent ?

3 Malgré toutes les tentatives d'extermination massive, le peuple palestinien refuse de quitter sa patrie. Le 7 octobre 2023, la population palestinienne dans la bande de GAZA était au nombre de $2,3$ millions.

a Sachant que dans cette période, l'augmentation moyenne naturelle de la population palestinienne est de 5000 personnes chaque mois, estimer la population palestinienne le 7 aout 2024 si cette "guerre de génocide" se poursuit 10 mois au total.

b Justifier alors l'affirmation suivante : "cette guerre de génocide n'arrivera pas à exterminer le peuple palestinien".

Exercice N°3: **(7 points).**

▶ **(I)** Soit g une fonction définie et dérivable sur $]0,+\infty[$.
Pour tout réel $x>0$, on pose : $G(x)=\int_1^x g(t)dt$
Dans l'annexe ci-jointe fig.1, on a représenté dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ les courbes $\mathscr{C}$ et Γ de g et G et on a placé les points $B\left(0,\dfrac{3}{2(e-1)}\right)$ et $D\left(\dfrac{1}{e},-\dfrac{1}{2}\right)$ tels que $D\in\Gamma$

1 a) Vérifier que G est la primitive de g sur $]0,+\infty[$ qui s'annule en 1

b) Justifier, alors, que la courbe $\mathscr{C}$ correspond à g

c) Déterminer $g(1)$ et $g'(1)$

2 Donner le tableau de signe de g' puis déduire que $I(1,0)$ est un point d'inflexion de Γ

3 Soit A l'aire de la partie E du plan limitée par $\mathscr{C}$, l'axe $\left(O,\vec{i}\right)$ et les droites : $x=1$ et $x=e$

a) Hachurer E

b) Vérifier que la valeur moyenne $\overline{g}$ de g sur $[1,e]$ est égale à $\dfrac{3}{2(e-1)}$

c) Tracer, alors sur l'annexe fig.1 , un rectangle d'aire égale à A

4 Dans la suite de l'exercice on admet que pour tout $x>0$ on a : $g(x)=\dfrac{a+b\ln x}{x}$

a) En utilisant les résultats de la première question, justifier que $g(x)=\dfrac{1+\ln x}{x}$

b) En déduire l'expression de $G(x)$ pour tout $x>0$

▶ **(II)** On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=-2x+(1+\ln x)^2$
Et on désigne par $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1 Calculer $\lim\limits_{0^+} f$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2 a) Montrer que la droite $\Delta : y=-2x$ est une direction asymptotique à $\mathscr{C}_f$ au $V(+\infty)$

b) Préciser la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à Δ

3 a) Vérifier que pour tout $x>0$ on a : $f'(x)=2\left(g(x)-1\right)$

b) En utilisant la courbe $\mathscr{C}$ de g dresser le tableau de variation de f sur $]0,+\infty[$

c) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α et que $0,1<\alpha<0,2$

4 a) Prouver que le point $J(1,-1)$ est un point d'inflexion de $\mathscr{C}_f$

b) Montrer que Δ est la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $\dfrac{1}{e}$

5 Tracer Δ et $\mathscr{C}_f$ sur l'annexe fig.2.

6 Soit S l'aire de la surface plane limitée par $\mathscr{C}_f$, la droite Δ et les droites : $x=1$ et $x=e$
En intégrant par parties, montrer que $S=2e-1$

Exercice N°4: **(4,5 points).**

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_1 = \dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \dfrac{n+1}{2n} u_n$

1. a) Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $u_n > 0$

   b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante sur $\mathbb{N}^*$

   c) Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?

2. Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $v_n = \dfrac{u_n}{n}$

   a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique dont on précisera la raison q et le 1^{er} terme.

   b) Exprimer v_n en fonction de n puis déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $u_n = \dfrac{n}{2^n}$

3. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[1, +\infty[$ par : $f(x) = \ln x - x \ln 2$

   a) Déterminer la limite de f en $+\infty$

   b) En déduire la limite de la suite (u_n)

Annexe à rendre avec la copie

Nom et prénom : .... **Classe :** 4 $Sc.Tech.(...)$ **N° :** ....

fig.1

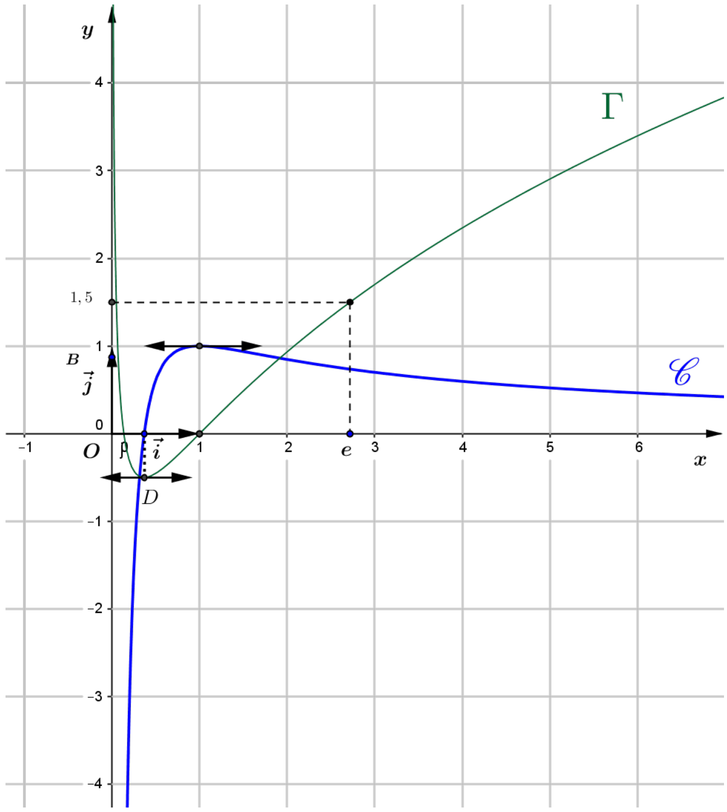


fig.2