L.P El Manchel Prof: Zrafi Karim	Devoir de synthèse N°3 Durée : 3 heures	Classe : $4^{ème}$ sc. Tech A.S : 2023/2024

❖ Exercice 1 ▼ 04 points

▶ Les résultats seront arrondis à l'unité sauf indication contraire.

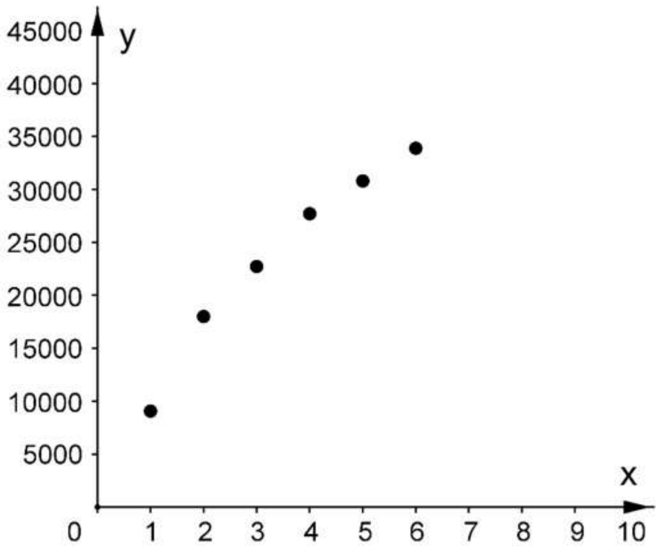
♦ Depuis le 7 octobre 2023 l'armée de l'occupation israélienne mène dans la bande de GAZA une « guerre de génocide » :
(Crime contre l'humanité tendant à la massacre totale ou partielle d'un groupe national, ethnique, racial ou religieux).

♦ Le tableau statistique ci-dessous donne le nombre de Martyrs palestiniens en fonction du nombre de mois à partir du 7 octobre.

Nombre de mois : x	1	2	3	4	5	6
Nombre de Martyrs : y	9061	17997	22722	27708	30800	33886

(Source : Le ministère de la Santé de Gaza)

On donne ci-dessous le nuage de points associé à la série statistique (x, y).



1°/a) Déterminer le coefficient de corrélation r de la série (x, y). (arrondir à 10^{-3} près).

b) Un ajustement affine de la série (x, y) à court terme est-il justifié ?

c) Déterminer une équation de la droite D de régression de y en x, obtenue par la méthode des moindres carrées.

d) En déduire une estimation du nombre de Martyrs palestiniens si ce massacre se prolonge un mois de plus.

2°/L'allure du nuage permet d'envisager un ajustement logarithmique.
On admet que $y = 8595 + 13772 \ln(x)$.

a) En utilisant cet ajustement, donner une estimation du nombre de Martyrs palestiniens si cette tuerie dure un mois de plus.

b) Le ministère de la santé de Gaza annonce qu'au $7^{ème}$ mois de cette guerre le nombre de Martyrs palestiniens s'élève à 34622.
Lequel des deux ajustements est le plus pertinent ?

3°/a) Malgré toutes les tentatives d'extermination massive, le peuple palestinien refuse de quitter sa patrie.
Le 7 octobre 2023, la population palestinienne dans la bande de GAZA était au nombre de 2,3 millions.
Sachant que dans cette période, l'augmentation moyenne naturelle de la population palestinienne est de 5000 personnes chaque mois.
Donner alors une estimation de la population palestinienne le 7 aout 2024 si cette « guerre de génocide » se poursuit 10 mois au total.

b) Justifier alors l'affirmation suivante :
« Cette guerre de génocide n'arrivera pas à exterminer le peuple palestinien »

❖ Exercice 2 ▼ 4.5 points

Les parties (I) et (II) sont indépendantes.

• (I) Une usine utilise, pour la production des agrafeuses, deux chaînes dont l'une est plus nouvelle et très fiable que l'autre. Ainsi, dans la production totale on a relevé :

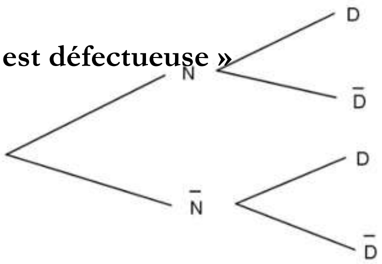
• 75% des agrafeuses proviennent de la nouvelle chaîne.

• 18% des agrafeuses provenant de l'ancienne chaîne sont défectueuses.

• 2% des agrafeuses provenant de la nouvelle chaîne sont défectueuses.

On prélève au hasard une agrafeuse dans la production totale, et on considère les évènements :

N: «L'agrafeuse provient de la nouvelle chaîne» et D: «L'agrafeuse est défectueuse »



1/ Recopier et compléter l'arbre pondéré de probabilités ci-contre.

2/ Montrer que p(D) = 0,06

3/ Sachant que l'agrafeuse est conforme, quelle est la probabilité qu'elle provienne de la nouvelle chaîne de fabrication ? (On donnera le résultat sous forme de fraction irréductible).

4/ La vente de ces agrafeuses se fait par lot de 10 pièces. Un client achète un lot.

Quelle est la probabilité qu'au moins une des agrafeuses de ce lot soit défectueuse ?

(II) On admet que la durée de vie exprimée en années, de chaque agrafeuse avant le premier défaut est une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre λ où λ est un réel strictement positif.

Une étude statistique du service de contrôle a permis d'établir que la probabilité qu'une agrafeuse présente un défaut pendant la première année d'utilisation est égale à 0,117

1/ En arrondissant le résultat à 10^{-3} près, montrer que $\lambda = 0,1241$.

2/ Estimer la probabilité qu'une agrafeuse dure plus de deux ans ?

3/ L'agrafeuse a été déjà utilisée durant deux ans sans aucun défaut, quelle est la probabilité qu'elle reste encore trois ans sans défaut ?

4/ Déterminer, à une année près, la durée de vie moyenne de ces agrafeuses ?

❖ Exercice 4 ▼ 4.5 points

A] On considère la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x) = x - x\ln x$.

1°/a) Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$; $g'(x) = -\ln x$

b) Dresser le tableau de variation .

B] On considère la suite U définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = \dfrac{e^n}{n^n}$

1°/ Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $v_n = \ln(u_n)$

a) Montrer que pout tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = g(n)$.

b) Etudier le sens de variation de la suite (v_n).

c) En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

2°/ a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < u_n \leq e$

b) En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite

❖ Exercice 4 ▼ 7 points

On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(x) = \ln(x^2+1)$.On désigne par ζ_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1°/ Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat.

2°/ a) Calculer $f'(x)$, pout tout $x \geq 0$.

b) Montrer que $f''(x) = 2\dfrac{(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$, pout tout $x \geq 0$.

c) Déduire que le point A(1 ;ln2) est un point d'inflexion de la courbe ζ_f .

3°/Dans la figure donnée en annexe est représentée la courbe ζ_f de fonction f et les points :

A, E(0 ; ln2-1) et K(1-ln2 ; 0)

a) Soit T la tangente à ζ_f au point A. Montrer qu'une équation de T est $y = x - 1 + \ln 2$.

b) Montrer que T coupe l'axe des ordonnées au point E et l'axe des abscisses en K.

c) Tracer la tangente T dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

4°/ Soit L l'aire du triangle OKE et S l'aire de la partie du plan limitée par la courbe la droite T et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

a) Montrer que $L = \dfrac{(1 - \ln 2)^2}{2}$.

b) Montrer que pour tout $x \in [0;1], \ln\left(1 + x^2\right) \leq \ln(1 + x)$.

c) Montrer que pour tout $x \geq 0$ on a : $\dfrac{x}{1+x} = 1 - \dfrac{1}{1+x}$

d) En déduire que $\displaystyle\int_0^1 \ln(x+1)\,dx = 2\ln 2 - 1$.

e) Montrer que $\dfrac{(1 - \ln 2)^2}{2} \leq S \leq \ln 2 - \dfrac{1}{2}$.

5°/ On considère la suite (I_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $I_n = \displaystyle\int_0^1 \ln^n\left(1 + x^2\right)dx$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $I_n > 0$.

b) Montrer que (I_n) est une suite décroissante. En déduire qu'elle est convergente.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $I_n \leq (\ln 2)^n$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.

Feuille annexe a rendre avec la copie

Nom et prénom :……………………………………………