| Délégation Régionale de l'éducation de Monastir | DEVOIR DE SYNTHÈSE N° 3 | |
|---|---|---|
| | Épreuve : Mathématiques | Section : $4^{ème}$ science expérimentale |
| | Durée 3 H | MAI 2024 |

Le sujet comporte 5 pages dont la page 5/5 à rendre avec la copie

## Exercice 1 ( 4 pts )

Une étude porte sur la croissance en taille d'une espèce de poisson dans une cage de pisciculture en fonction de l'âge des poissons.

| Age t ( en semaine ) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Taille y ( en cm ) | 10 | 18 | 25 | 33 | 40 | 41 | 50 | 53 |

1/a) Déterminer, à $10^{-3}$ prés, le coefficient de corrélation linéaire entre t et y. Interpréter le résultat.

b) Ecrire une équation de la droite de régression D de y en t.

(Les coefficients seront arrondis au centième).

c) En utilisant cet ajustement donner une estimation de la taille atteinte d'un poisson au bout de 20 semaines.

2/ D'autres études ont permis d'établir que la taille des poissons, exprimée en t semaines, vérifie la relation $h(t) = 87,5\left(1 - e^{-0,12\,t}\right)$. ( on définit ainsi une fonction h sur $]0,+\infty[$ ).

a) En utilisant cet ajustement donner une estimation de la taille atteinte au bout de 20 semaines.

b) Dresser le tableau de variation de h sur $]0,+\infty[$.

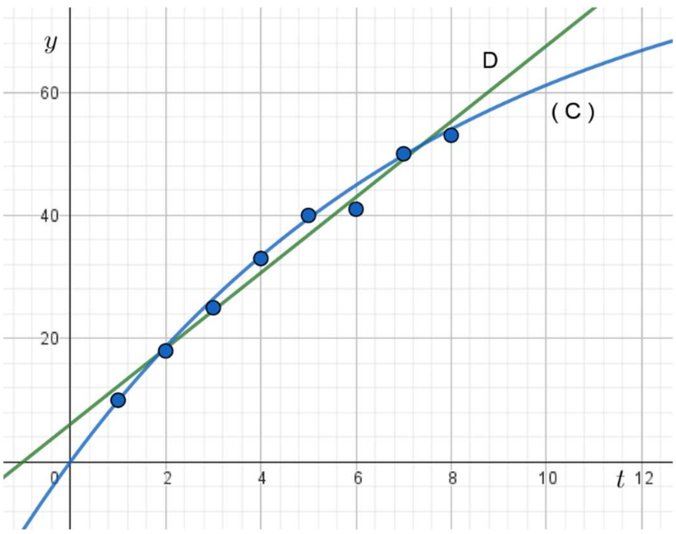
c) Donner la taille limite d'un poisson de cette espèce.

3/ Dans la figure ci-contre, on a représenté la droite D, la courbe (C) de la fonction h et le nuage de points de la série $(t, y)$.

a) Lequel des deux ajustements proposés s'avère le plus adaptable à la situation ?

Justifier la réponse.

b) Donner, en semaine et en jour, le temps nécessaire pour que la taille d'un poisson de cette espèce ait atteint sa valeur limite à un cm prés.



## Exercice 2 ( 5 pts )

**On équipe un four d'un système de sécurité qui déclenche quand la température dépasse 500°C. On veut étudier la fiabilité du système.**

**Une étude a montré que, sur une journée, on obtenait les résultats suivants :**

- **La probabilité que la température dépasse 500°C est égale à 0.02.**
- **La probabilité que le système se déclenche par erreur ( c.à.d. la température ne dépasse pas 500°C et le système se déclenche) est égale à 0.01.**
- **La probabilité que le système se déclenche quand la température dépasse 500°C est égale à 0.9**
**On note : T l'évènement « la température dépasse 500°C » .**

**S l'évènement « le système se déclenche ».**

**1/a) Donner $P(T)$ , $P(S/T)$ et $P(S\cap\overline{T})$.**

**b) Construire un arbre pondéré qui illustre cette situation.**

**c) Montrer que $P(S)=0.028$.**

**d) Le système vient de se déclencher. Quelle est la probabilité que la température ait réellement dépassée 500°C.**

**2/ Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de jour par semaine où le système se déclenche.**

a) **Déterminer la loi de probabilité de X.**
b) **Déterminer la probabilité que le système se déclenche au plus une fois par semaine.**
**3/ On suppose dans cette question que la durée de vie en année de l'unité centrale du système de sécurité est une variable aléatoire Y qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda$ .**

a) **Déterminer $\lambda$ à $10^{-3}$ prés, pour que $P(Y\leq 5)=0.3$.**

**Dans la suite on prend $\lambda=0.071$.**
b) **Déterminer la probabilité que l'unité ait une durée de vie entre 5 et 10 ans.**

c) **Sachant que l'unité n'a pas eu de panne au cours des 5 premières années, quelle est la probabilité qu'elle fonctionne encore 8 ans sans tomber en panne.**

## Exercice 3 : ( 4 pts )

**Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul.**

**On donne $I_n=n\int_n^{2n}\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx$ et $J_n=n\int_n^{2n}\frac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x}}dx$.**

**1/a) Montrer que $I_1=e-\sqrt{e}$.**

**b) Montrer que pour tout $n\geq 1$ , $I_n=n\left(e^{\frac{1}{n}}-e^{\frac{1}{2n}}\right)$. En déduire que $I_2=2\sqrt{e}-2\sqrt[4]{e}$.**

**c) Vérifier que pour tout $n\geq 1$ , $I_n=ne^{\frac{1}{2n}}\left(e^{\frac{1}{2n}}-1\right)$. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=\frac{1}{2}$.**

2/a) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $J_n = e^{\frac{1}{n}} - \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2n}} - I_n$ .

b) En déduire que $J_2 = \frac{3}{2}\sqrt[4]{e} - \sqrt{e}$ .

3/ Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}$ .

On désigne par $\zeta_f$ sa courbe représentative, dans un repère orthonormé.

On note $A(n)$ l'aire (en unité d'aire) de la partie du plan limitée par $\zeta_f$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = n$ et $x = 2n$ .

a) Calculer $A(2)$.

b) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} n\,A(n) = 0$ .

## Exercice 4 : ( 7 pts )

Soit f une fonction définie sur $]1,+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{\ln^2(x)} - \frac{1}{\ln x}$ .

On désigne par $\zeta_f$ sa courbe représentative, dans le repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1/a) Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ .Interpréter graphiquement le résultat.

b) Montrer que $\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$. Interpréter graphiquement le résultat.

2/a) Montrer que pour tout $x \in ]1,+\infty[$ , $f'(x) = \frac{\ln(x)-2}{x\ln^3(x)}$ .

b) Dresser le tableau de variation de f.

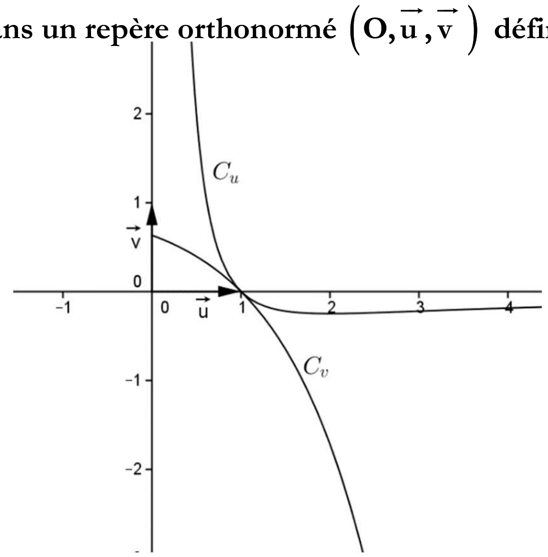
3/a) Vérifier que le point $B(\sqrt{e},2)$ est un point de $\zeta_f$ .

b) Montre que $y = -\frac{x}{e} + 1$ est une équation de la tangente T à $\zeta_f$ en $A(e,0)$.

4/ On donne ci-contre les courbes des fonction u et v dans un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$ définies sur $]0,+\infty[$ par : $u(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$ et $v(x) = 1 - e^{x-1}$ .

a) Justifier graphiquement que $u(x) \geq v(x)$ pour tout $x \succ 0$ .

b) En déduire que pour tout $x \succ 1$ . $\zeta_f$ est au-dessus de T.



c/ Dans l'annexe ci-jointe, on a placé les points A, B et $C\left(e^2,-\frac{1}{4}\right)$.

Tracer T et $\zeta_f$ . (Remarquer que T passe par le point $(0,1)$ ).

5/ On donne l'intégrale $I=\int_{\sqrt{e}}^{e} f(x)\,dx$ .

a) Donner une interprétation graphique de I.

b) Montrer, en intégrant par parties $\int_{\sqrt{e}}^{e} \frac{1}{\ln x}dx$ , que $I=2\sqrt{e}-e$ .

c) Montrer que l'aire en unité d'aire de la partie du plan limitée par $\zeta_f$ et les droites d'équations $x=1$, $y=0$ et $y=2$ est égale à $4\sqrt{e}-e-2$ .

6/ Soit h la restriction de f à l'intervalle $\left]1,e\right]$.

a) Montrer que h réalise une bijection de $\left]1,e\right]$ sur $\left[0,+\infty\right[$ .( on note $h^{-1}$ sa fonction réciproque).

b) Montrer que pour tout $n\geq 1$, l'équation $h(x)=n^2-n$ admet une solution unique $u_n\in\left]1,e\right]$.

c) Déterminer $u_1$ et $u_2$ .

d) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=e^{\frac{1}{n}}$ . Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ .

**<u>Annexe à rendre avec la copie</u>**

**<u>Nom et prénom :</u>** ……………………………