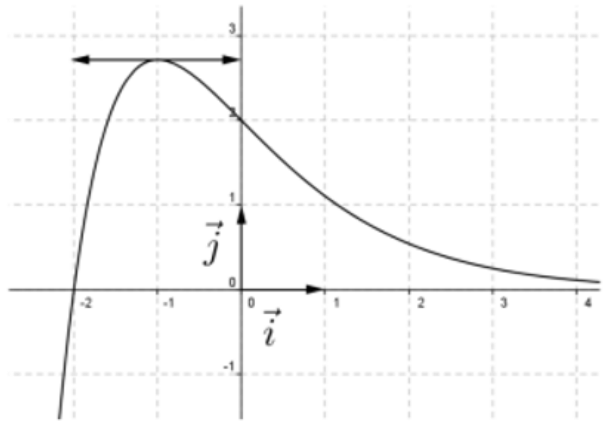
⋄⋄⋄ République tunisienne / Ministère de l'éducation ⋄⋄⋄			A.S. : 2023/2024
MATHEMATIQUE	4ème Sc.Exp	Date: 10/05/2024	Durée : 3h

Devoir de synthèse n°3

Exercice N 1 (4 points)

On a représenté ci-dessous dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe (C) d'une fonction f solution de l'équation différentielle $(E) : y + y' = e^{-x}$ et sa tangente au point d'abscisse -1 .

- La courbe (C) admet une branche parabolique de direction $(O\vec{j})$ au voisinage de $-\infty$.
- L'axe des abscisses est une asymptote à (C) .



1. Par lecture graphique déterminer :
   - a) $f(0)$ et $f'(-1)$
   - b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$
2. - a) Montrer que $f'(0) = -1$
   - b) En déduire une équation de la tangente à (C) au point d'abscisse 0
3. - a) Montrer que $f(-1) = e$.
   - b) Calculer l'aire de la partie du plan limité par (C) : l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$
4. - a) Montrer que la fonction $u : x \mapsto xe^{-x}$ est une solution de l'équation (E) .
   - b) Résoudre l'équation différentielle $(E_0) : y + y' = 0$.
   - c) Montrer qu'une fonction g est une solution de (E) si et seulement si $(g - u)$ est une solution de (E_0) .
   - d) En déduire l'expression de $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

Exercice N 2 (6 points)

Des moustiques entrent dans la salle d'une famille où sont installés une maman et son bébé .
On suppose qu'un moustique peut piquer au plus deux personnes.
On admet que la probabilité que le moustique pique le bébé est $0,4$; qu'elle pique la maman quand elle a piqué le bébé est $0,2$ et que la probabilité qu'elle ne pique ni le bébé ni la maman est $0,18$

1. Soient les événements :
   B :≪ Le moustique pique le bébé ≫ et M :≪ Le moustique pique la maman ≫ .
   Tous les résultats dans cette question seront arrondis à 10^{-2}
   - a) Montrer que $p\left(\overline{M}/\overline{B}\right) = 0.3$.
   - b) Construire un arbre pondéré qui modélise cette situation.
   - c) Calculer $p(M)$
   - d) Lorsque le moustique a piqué la maman, quelle est la probabilité qu'il pique le bébé ?

2. En fait le nombre de moustiques dans la salle est de 5 Quelle est la probabilité qu'au moins deux d'entre elles piquent le bébé et la maman ?

3. On admet que la douleur causée par la piqure du moustique peut durer jusqu'à 20 minutes à partir du moment de cette piqure et on désigne par T la variable aléatoire associée à la durée de la douleur. Calculer $p(T = 10)$ et $p(T \leq 10)$.

4. La maman va essayer de tuer ces moustiques. On admet que la variable aléatoire Θ égale au temps, en minutes, mis pour tuer un moustique suit une loi exponentielle de paramètre λ .

   a. Donner l'arrondi à 10^{-3} près de λ sachant que : $p(\Theta \leq 10) = 0,8$

   b. On admet que $\lambda = 0,161$ Quelle est la probabilité que toutes les moustiques seront tués pendant 20 minutes au maximum ?

Exercice N 3 (4 points)

Les résultats seront arrondis à l'unité sauf indication contraire.

• Depuis le 7 octobre 2023 l'armée de l'occupation israélienne mène dans ,
la bande de GAZA une ≪ guerre de génocide ≫ :
(Crime contre l'humanité tendant à la massacre totale ou partielle
d'un groupe national, ethnique, racial ou religieux).

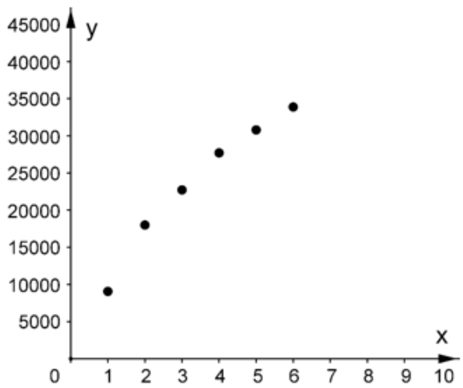
• Le tableau statistique ci-dessous donne le nombre de Martyrs palestiniens en fonction du nombre de mois à partir du 7 octobre.

-

Nombre de mois : x	1	2	3	4	5	6
Nombre de Martyrs : y	9061	17997	22722	27708	30800	33886

(Source : Le ministère de la Santé de Gaza) .

On donne ci-contre le nuage de points associé à cette série statistique .



1. a. Déterminer le coefficient de corrélation r de la série (x, y). (arrondir à 10^{-3} près).

   b. Un ajustement affine de la série (x, y) à court terme est-il justifié ?

   c. Déterminer une équation de la droite D de régression de y en x
   obtenue par la méthode des moindres carrées.

   d. En déduire une estimation du nombre de Martyrs palestiniens si ce massacre se prolonge un mois de plus.

2. L'allure du nuage permet d'envisager un ajustement logarithmique.
   On admet que : $y = 8595 + 13772 \ln x$.

   a. En utilisant cet ajustement, donner une estimation du nombre de Martyrs palestiniens si cette tuerie dure un mois de plus.

   b. Le ministère de la santé de Gaza annonce qu'au 7ème mois de cette guerre le nombre de Martyrs palestiniens s'élève à 34622 .
   Lequel des deux ajustements est le plus pertinent ?

3) a) Malgré toutes les tentatives d'extermination massive, le peuple palestinien refuse de quitter sa patrie.
Le 7 octobre 2023, la population palestinienne dans la bande de GAZA était au nombre de $2,3$ millions. Sachant que dans cette période, l'augmentation moyenne naturelle de la population palestinienne est de 5000 personnes chaque mois.
Donner alors une estimation de la population palestinienne le 7 aout 2024 si cette ≪ guerre de génocide ≫ se poursuit 10 mois au total.

b) Justifier alors l'affirmation suivante :
≪ Cette guerre de génocide n'arrivera pas à exterminer le peuple palestinien ≫

Exercice N 4 (6 points)

Soit f la fonction définie sur $\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$ par $f(x)=\ln\left(\sqrt{2x+1}\right)$.

On désigne par C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^+} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$; interpréter graphiquement le résultat

c) Montrer que f est dérivable et que pour tout $x\in\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$, on a $f'(x)=\frac{1}{2x+1}$:

d) Dresser le tableau de variations de f .

2) a) Déterminer une équation de la tangente Δ à C en son point d'abscisse 0 .

b) Soit φ la fonction définie sur $\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$ par : $\varphi(x)=f(x)-x$.

Dresser le tableau de variations de φ

c) En déduire que pour tout $\in\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$; $f(x)\leq x$.
Préciser alors la position de (C) et Δ .

d) Tracer Δ et (C) . (l'unité graphique est 2 cm) .

3) a) Déterminer les deux réels a et b tels que : $\frac{x}{2x+1}=a+\frac{b}{2x+1}$

b) Montrer que $\int_0^1\frac{x}{2x+1}\,dx=\frac{1}{2}\left(1-\ln\sqrt{3}\right)$

c) Calculer l'aire en cm^2 de A la région du plan délimitée par la courbe C , l'axe des abscisses et les droites $x=0$ et $x=1$

4) Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} U_0=1 \\ U_{n+1}=f(U_n)\end{cases}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0<u_n\leq 1$

b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente. Calculer sa limite ℓ