Lycée Hédi Khéfacha – Monastir	*Devoir de synthèse n° : 3* *4 Maths*
֍֍֍֍	**MATHEMATIQUES**
Profs: Mr Mansour * Mr Aguir	**Durée : 4h** **Le 09 /05/2024**

Exercice 1 : (2 points)

Tous les résultats numériques seront arrondis à 10^{-3} près sauf indication contraire.

Une maison d'édition a ouvert le premier janvier 2021, sur internet, un site de vente par correspondance.

Le tableau suivant donne l'évolution du nombre de livres vendus par mois en milliers.

Mois	Janvier 2021	Janvier 2022	Juin 2022	Janvier 2023	Juin 2023
Rang du mois x_i	1	13	18	25	30
Nombre de livres (en milliers) y_i	1,5	2,5	3	5	6

1) a) Représenter le nuage de points associé à la série statistique (x_i ; y_i) dans un repère orthogonal (1 cm représente deux mois en abscisse el 1 cm représente 0,5 milliers en ordonnée)

b) Calculer le coefficient de corrélation de la série statistique (x_i ; y_i).

2) L'allure du nuage permet d'envisager un ajustement exponentiel. Pour cela on pose $z_i = \ln(y_i)$

Après l'avoir recopié, compléter le tableau suivant :

Rang du mois x_i	1	13	18	25	30
$z_i = \ln(y_i)$	0,405	0,916	1,099		

3) a) Ecrire une équation de la droite d'ajustement affine D de z en x par la méthode des moindre Carrés.

b) Déduire alors que : $y = 1,36\ e^{0,049x}$

4) En supposant que l'évolution se poursuivre de cette façon :

a) A partir de quel mois peut-t-on prévoir que le nombre de livres vendus dépasse 10 milliers?

b) Donner une estimation à l'unité près du nombre de livres qui seront vendus en janvier 2025.

5) Calculer le nombre moyen m de livres vendus chaque mois entre janvier 2021 et juin 2023.

(On donnera une valeur approchée à l'unité près) .

Exercice 2 : (3 points)

Un réparateur de téléphones portables achète 30 composants électroniques en apparence tous identiques , mais dont certains présentent un défaut .

La probabilité qu'un composant soit défectueux est de 0,04

On donnera les résultats à 10^{-2} prés .

1) On admet que l'achat de n composants $(n \geq 2)$ est assimilé à n tirages successifs avec remise.

Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de composants défectueux parmi les n achetés.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Donner l'espérance mathématique de X.

c) Soit l'événement A_n : « avoir au moins un composant défectueux. » et on pose $p_n = p(A_n)$.

Exprimer p_n en fonction de n.

d) Déterminer la plus petite valeur de l'entier naturel pour laquelle p_n est supérieure ou égale à 0,999

2) On suppose que la durée de vie (en heures) d'un composant défectueux suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_1 = 2\times10^{-4}$ et que la durée de vie (en heures) d'un composant non défectueux suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_2 = 10^{-4}$

Soit T la durée de vie (en heures) d'un composant acheté au hasard.

a) Montrer que $p(T \geq t) = 0,04e^{-2\times10^{-4}.t} + 0,96e^{-10^{-4}.t}$

b) Sachant que le composant a fonctionné plus que 2000 heures, calculer la probabilité qu'il soit défectueux.

Exercice 3 : (4 points)

Pour tout entier naturel non nul n , on pose $U_n = 1 + 11 + 11^2 + ... + 11^{n-1}$.

1) Vérifier que $U_{2024} - 11\,U_{2023} = 1$, puis en déduire que $U_{2024} \wedge 11 = 1$.

2) Montrer que : $10\,U_n = 11^n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3) On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation (E) : $11x \equiv 1 \pmod{U_{2024}}$.

a) Montrer que si x est une solution de (E) alors $x \equiv 11^{2023} \pmod{U_{2024}}$.

b) Déduire l'ensemble de solutions de (E) .

4) a) Vérifier que le couple $(2 , 4\,U_{2024})$ est une solution de (F) : $11^{2024}\,x - 5\,y = 2$.

b) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (F).

5) Soit p un nombre premier tel que : $7 \leq p \leq 2024$.

a) Montrer que $U_p \equiv 1 \pmod{p}$.

b) Déduire que $U_{2025-p} \equiv U_{2024} \pmod{p}$.

c) Sachant que 2017 est un nombre premier ; déterminer le reste de U_{2024} par 2017.

Exercice 4 : (5,5 points)

A) Soit dans IR l'équation différentielle (E) : y' = y.

1) a) Déterminer la solution g de (E) qui vérifie g(0) = 1.

b) Vérifier que g réalise une bijection de IR vers $]0,+\infty[$.

2) Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt{x}\,g^{-1}(x)$ où g^{-1} la fonction réciproque de g.

Expliciter f(x) pour $x \in]0,+\infty[$.

B) On donne f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = -\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$.

1) Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$ on a $f'(x) = \frac{\ln(x)-2}{2x\sqrt{x}}$ puis dresser le tableau de variation de f.

2) Pour tout n de ℕ*, on considère la fonction g_n définie sur]0,1[par $g_n(x) = f(x) - x^n$.

a) Montrer que la fonction g_n est strictement décroissante sur]0,1[.

b) En déduire que pour tout n de ℕ*, il existe un unique réel $a_n \in]0,1[$ tel que $f(a_n) = (a_n)^n$.

c) Montrer que pour tout n de ℕ* on a : $g_n(a_{n+1}) < 0$.

d) Montrer que la suite (a_n) est croissante puis déduire qu'elle est convergente.

3) On pose $L = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

a) Vérifier que $0 < a_1 \leq L \leq 1$.

b) Vérifier que pour tout n de ℕ*, $h(a_n) = n$ où $h(x) = -\frac{1}{2} + \frac{\ln(-\ln x)}{\ln x}$

c) Montrer que L = 1. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n)^n = 0$.

4) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $U_n = \sum_{k=n}^{2n} (a_k)^k$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a : $(n+1)(a_{2n})^{2n} \le U_n \le (n+1)(a_n)^n$

b) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $n(a_n)^n = -\frac{1}{2} f(a_n) - \frac{\ln(-\ln(a_n))}{\sqrt{a_n}}$. En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} n(a_n)^n = +\infty$

c) Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{U_n}{n}$

Exercice 5 : (5,5 points)

I) Soit la fonction f définie sur IR par $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln(1+x^2)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1) Montrer que f est continue en 0.

2) Montrer que f est impaire.

II) Soit F la fonction définie sur IR par $F(x) = \int_x^{x^2} f(t)\,dt$.

On désigne par C_F la courbe représentative de F dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) a) Montrer que F est paire.

b) Etudier le signe de F(x) sur $[0 , +\infty[$

2) Montrer que F est dérivable sur IR et que F' (0) =0 et $\forall x \in$ IR* , $F'(x) = \dfrac{2\ln(1+x^4) - \ln(1+x^2)}{x}$.

3) Soit u la fonction définie sur IR par u(x) = $x^3 + 2x - 1$.

a) Montrer que l'équation u(x) = 0 admet dans IR une unique solution α et que $\frac{1}{4} < \alpha < \frac{1}{2}$.

b) En déduire le signe de u(x) suivant les valeurs de x.

c) Montrer que $\sqrt{\alpha}$ est l'unique solution de l'équation F'(x) = 0 dans $]0 , +\infty[$

d) Déterminer le sens de variation de F sur $[0 , \sqrt{\alpha}[$ et $[\sqrt{\alpha} , +\infty[$

4) a) Montrer que $\forall x \in]0 , +\infty[$, $F(x) + F(\frac{1}{x}) = 3\ln^2(x)$

b) Déterminer alors $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$.

c) Dresser le tableau de variation de F .

5) a) Soit $x \in]0, +\infty[$ .Montrer que $\int_x^{x^2} \frac{\ln(t^2)}{t} dt = 3\ln^2 x$ puis déduire que $F(x) - 3\ln^2(x) = \int_x^{x^2} \dfrac{\ln(1+\frac{1}{t^2})}{t} dt$

b) Montrer que $\forall\ t \in [0 + \infty[$, $\ln(1+t) \le t$

c) Montrer que pour tout réel x > 1 , $3\ln^2(x) \le F(x) \le 3\ln^2(x) + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2x^4}$

d) On note $\mathscr{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par C_F , l'axe des abscisses , et les droites d'équations x = 1 et x = e

Montrer que : $3e - 6 \le \mathscr{A} \le 3e - \frac{17}{3} + \frac{1}{6e^3} - \frac{1}{2e}$.