4ème Maths ❄ **Devoir de Synthèse 3** ❄ Durée : 4 h ❄

Profs : ✍ Selmi.M ✍ Khaled.B ✍ Zrafi.K ✍ Mbarki.J ✍
✍ Haj Salem.H ✍ Harabi.A ✍Haj Rhouma A. ✍

Dream big, work hard, make it happen

Exercice 1 (4 points)

Tous les résultats numériques seront arrondis au centième sauf indication contraire.
Une machine **(M)** est achetée 3000DT . Le prix de revente y, exprimé en dinars, est donné en fonction du nombre x d'années d'utilisation par le tableau suivant :

Nombre d'années d'utilisation : x_i	0	1	2	3	4	5
Prix en revente en dinars : y_i	3000	2400	1920	1536	1229	983

A)

1. a) Donner une équation de la droite de régression D de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés.

   b) Déterminer le prix de revente après 6 années d'utilisation.

   c) Déterminer après combien d'années d'utilisation le prix de revente devient inférieur strictement à 300DT.

2. On pose $z = \ln(y)$.

   a) Compléter sur l'annexe, le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3	4	5
$z_i = \ln(y_i)$						

   b) Donner une équation de la droite de régression de z en x.

   c) Déterminer une expression de y en x de la forme $y = A^x \times B$ où A est un réel arrondi au centième et B est un réel arrondi à l'unité .

3. En admet que $y = (0,80)^x \times 3011$.

   a) Déterminer le prix de revente après 6 années d'utilisation.

   b) Déterminer après combien d'années d'utilisation le prix de revente devient inférieur strictement à 500DT.

B) La durée de vie de la machine **M** , est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0.18$. Les probabilités seront arrondies à 10^{-3} près.

1. Sachant que la machine **M** n'a pas eu de panne au cours des 3 premières années, quelle est la probabilité qu'elle ait une durée de vie supérieure à 5 ans ?

2. On considère un lot de **dix** machines **M** , on admet que la durée de vie d'une machine est indépendante de celle des autres machines et que $p(X > 5) = 0.4$.

   a) Quelle est la probabilité que, dans ce lot, l'une au moins des machines ait une durée de vie supérieure à 5 ans ?

   b) Quelle est la probabilité que, dans ce lot, les trois dernières machines n'ont pas dépassées 5 ans comme durée de vie ?

Exercice 2 **(4 points)**

On dispose d'un dé cubique parfait dont les faces sont numérotées $1, 1, 1, 1, 2$ et 2
d'une urne **U** contenant trois boules blanches et trois boules noires.

I/ On lance le dé une seule fois et on note le numéro de la face supérieure.
Si on obtient le numéro 1 , on tire une boule de l'urne **U**.
Si non on tire successivement et sans remise deux boules de l'urne **U** .

1. Calculer la probabilité de l'événement $N_1{}'$ « obtenir une face qui porte le numéro 1 »
2. On considère les événements suivants :
   A « avoir une seule boule blanche»
   B «Avoir deux boules de même couleur»
   a. Montrer que $p(A) = \dfrac{8}{15}$
   b. Calculer p(B)
3. On désigne par x la variable aléatoire qui correspond aux nombres de boules blanches tirées
   a. Déterminer la loi de probabilité de x
   b. Calculer l'espérance et variance de x

II/ On tire au hasard successivement et avec remise n boules ($n \geq 2$)de l'urne **U**.
On considère les événements suivants :

- C :« Obtenir des boules de couleurs différentes »
- D :« Obtenir au plus une boule blanche »

1. Calculer en fonction de $n, p(C), p(D)$ et $p(C \cap D)$.
2. On a représenté dans un repère orthonormé, la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction f : $x \mapsto 2^x$
   et la droite $D : y = x + 2$ (voir annexe).
   Déterminer graphiquement la valeur de n, pour que les événements C et D
   soient indépendants.

Exercice 3 (5 points)

Partie A :

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_n = 4^n + 15n - 1$.

1. a) Déterminer, suivant l'entier naturel n, le reste modulo 5 de 4^n.

   b) En déduire, suivant la parité de n, le reste modulo 5 de (U_n).

   c) Déterminer alors, le chiffre des unités de (U_{2023}) .

2. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, 4^n \equiv 3n + 1 (\bmod 9)$.
   (On pourra remarquer que $4^n = (3+1)^n$)

   b) En déduire que les termes de la suite (U_n) sont des multiples de 9 .

Partie B :

1. On considère dans l'ensemble l'équation : $(E) : 9x^2 + 15x + 7 \equiv 0 (\bmod 19)$.

   a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{Z}; 9x^2 + 15x + 7 \equiv (3x - 7)^2 - 4 (\bmod 19)$.

   b) En déduire que l'ensemble des solutions de (E) est :
   $S = \{19k + 3, \quad k \in \mathbb{Z}\} \cup \{19k + 8, \quad k \in \mathbb{Z}\}$.

2. Soit $p \geq 2$ un entier naturel premier.
   On suppose qu'il existe a $\in \mathbb{Z}$ tel que : $9a^2 + 15a + 7 \equiv 0 (\bmod p)$.

   a) Vérifier que $9a^2 + 15a + 7 = 3(a+1).(3a+2) + 1$.

   b) Montrer que p ≥ 5.

   c) Montrer que $(3a+2)^3 \equiv 1 (\bmod p)$.

   d) En déduire que $(3a+2) \wedge p = 1$.

3. a) Justifier que $(3a+2)^{p-1} \equiv 1 (\bmod p)$.

   b) En utilisant le théorème de Fermat, montrer que $p \equiv 1 (\bmod 3)$.

4. On considère dans l'ensemble l'équation : $(F) : 9x^2 + 15x + 7 \equiv 0 (\bmod 149)$.

   a) Montrer que l'entier naturel 149 est premier.

   b) Déterminer en justifiant la réponse l'ensemble des solutions de (F).

Exercice 4 (7 points)

Partie A

On considère la fonction f définie $[1,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x)=\left(\dfrac{x}{x-1}\right)e^{-\frac{1}{x-1}} \text{ si } x>1 \\ f(1)=0 \end{cases}$

On désigne par $(\mathscr{C}_f)$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. a) Montrer que f est continue à droite en 1.

   b) Étudier la dérivabilité de f à droite en 1et interpréter le résultat graphiquement.

   c) Montrer que pour tout $x>1, f'(x)=\dfrac{1}{(x-1)^3}e^{-\frac{1}{x-1}}$

   d) Dresser le tableau de variation de f.

   e) Tracer $(\mathscr{C}_f)$.

2. Pour tout réel $x\in[1,+\infty[$ on pose $F(x)=\displaystyle\int_x^2 f(t)dt$.

   a) Montrer que F est continue sur $[1,+\infty[$.

   b) Montrer que pour tout $x>1$ on a : $\displaystyle\int_x^2 e^{-\frac{1}{t-1}}dt=\frac{1}{e}-(x-1)e^{-\frac{1}{x-1}}-\int_x^2\frac{1}{t-1}e^{-\frac{1}{t-1}}dt.$

   c) En déduire que pour tout $x>1$ on a $F(x)=\dfrac{1}{e}-(x-1)e^{-\frac{1}{x-1}}$ et calculer $\displaystyle\lim_{x\to1^+}F(x)$

   d) Calculer alors l'aire A, de la partie du plan limitée par $(\mathscr{C}_f)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=2$. .

Partie B

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ .On considère la fonction F_n définie sur $]1,+\infty[$ par $F_n(x)=(x-1)\cdot e^{-\frac{n}{x-1}}$

1. a) Montrer que pour tout $x>1$ on a : $F'_n(x)=\left(1+\dfrac{n}{x-1}\right)e^{-\frac{n}{x-1}}$.

   b) Étudier les variations de F_n.

   c) Montrer que l'équation $F_n(x)=1$ admet une seule solution α_n et Vérifier que $\alpha_n>2$.

2. a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on a $F_n(\alpha_{n+1})=e^{\frac{1}{\alpha_{n+1}-1}}$.

   b) En déduire que la suite (α_n) est croissante.

3. a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on a : $(\alpha_n-1)\cdot\ln(\alpha_n-1)=n$

   b) Soit g la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par $g(x)=x\ln x$.
   Montrer que g réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur $[0,+\infty[$

   c) Montrer alors que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\alpha_n=+\infty$.

4. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on pose $I_n=\displaystyle\int_{\alpha_n}^{\alpha_{n+1}}F_n(t)dt$ et $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^n I_k$.

   a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on a : $1\le\dfrac{I_n}{\alpha_{n+1}-\alpha_n}\le e^{\frac{1}{\alpha_{n+1}-1}}$.

   b) En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{I_n}{\alpha_{n+1}-\alpha_n}$.

   c) Calculer $\lim S_n$.

BON TRAVAIL

ANNEXE A RENDRE

Nom et prénom :...

Classe et Numéro..............

Exercice 1 :

x_i	0	1	2	3	4	5
$z_i = \ln(y_i)$						

Exercice 2 :