Prof : Dhahbi . A *Lycée* cité Ibn khaldoun		***Devoir de synthèse n°3*** *Mathématiques*

Coefficient : 4	*Classe : 4^{eme} Maths 1*	*Jeudi 09-05-2024*	*4Heures*

N.B : Le sujet comporte 4 pages : de 1/4 à 4/4. La page 4 est à rendre avec la copie

« Qui va lentement, va sûrement et qui va sûrement, va plus loin »

EXERCICE N° 1: (5 points)

Les deux parties sont indépendantes

Partie A : Soit la suite (U_n) définie sur IN par : $U_n = 4^n + 15n - 1$.

1°/ a) Déterminer, suivant l'entier naturel n, le reste modulo 5 de 4^n.

b) En déduire, suivant la parité de n, le reste modulo 5 de (U_n).

c) Déterminer le chiffre des unités de (U_{2024}).

2°/ a) Montrer que pour tout $n \in IN$, $4^n \equiv 3n+1 (\bmod 9)$ (On pourra remarquer que $4^n = (3+1)^n$)

b) En déduire que les termes de la suite (U_n) sont des multiples de 9.

Partie B :

1°/ On considère dans l'ensemble $\mathbb{Z}$ l'équation : (E) : $9x^2 + 15x + 7 \equiv 0 (\bmod 19)$.

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{Z}$; $9x^2 + 15x + 7 \equiv (3x-7)^2 - 4 (\bmod 19)$.

b) En déduire que l'ensemble des solutions de (E) est : $S = \{19k + 3 / k \in \mathbb{Z}\} \cup \{19k + 8 / k \in \mathbb{Z}\}$.

2°/ Soit p ≥2 un entier naturel premier.

On suppose qu'il existe a $\in \mathbb{Z}$ tel que : $9a^2 + 15a + 7 \equiv 0 (\bmod p)$.

a) Vérifier que $9a^2 + 15a + 7 = 3(a+1).(3a+2) + 1$.

b) Montrer que p≥ 5.

c) Montrer que $(3a+2)^3 \equiv 1 (\bmod p)$.

d) En déduire que $(3a+2) \wedge p = 1$.

3°/ a) Justifier que $(3a+2)^{p-1} \equiv 1 (\bmod p)$.

b) En utilisant le théorème de Fermat, montrer que $p \equiv 1 (\bmod 3)$.

4°/ On considère dans l'ensemble $\mathbb{Z}$ l'équation : (F) : $9x^2 + 15x + 7 \equiv 0 (\bmod 149)$.

a) Montrer que l'entier naturel 149 est premier.

b) Déterminer en justifiant la réponse l'ensemble des solutions de (F).

EXERCICE N° 2: (3,5 points)

Une société fabrique des tubes à essais. Un contrôle de qualité a montré que 14% des tubes à essais présentent un défaut D_1 et 10% présentent un défaut D_2 et 4% présentent les deux défauts D_1 et D_2. Un tube à essai est défectueux s'il présente au moins l'un des deux défauts

1°/ Les évènements D_1 et D_2 sont-ils indépendants.

2°/Sachant que le tube à essais présente le défaut D_1.

Calculer la probabilité qu'il présente un défaut D_2.

3°/ Montrer que la probabilité de D « le tube à essais est défectueux » est $\frac{1}{5}$.

4°/ On suppose que la production est suffisamment importante pour assimiler chaque prélèvement à un tirage avec remise. On prélève n tubes dans la production (n ≥ 2) et on note X la variable aléatoire donnant le nombre de tubes présentant un défaut dans le prélèvement.

Voir recto-verso ☞

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) En déduite la probabilité p_n que l'un d'entre eux au moins présente un défaut

c) Quel est le nombre minimum n des tubes qu'ils faut choisir pour que $p_n \geq 0,9$.

5°/ On suppose que la durée de vie T en heures, de chaque tube qui présente un défaut Suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_1 = 0,004$ et que la durée de vie T en heures, de chaque tube qui ne présente pas aucun défaut suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_2 = 0,001$.

Soit T la durée de vie en heures, d'un tube à essai pris au hasard et on note les évènements :

D : " le tube à essai présente un défaut.

E : " le tube à essai a une durée de vie supérieur à 100heures".

On achète un tube à essai au hasard, on désigne par y la variable aléatoire qui indique sa durée de vie

a) Montrer que $p(y \geq T) = \dfrac{1}{5}e^{-\lambda_1 T} + \dfrac{4}{5}e^{-\lambda_2 T}$ pour tout T $T \in [0,+\infty[$

b) Calculer que P(E).

c) Calculer la probabilité qu'un tube à essai a une durée de vie supérieur à 300heures sachant qu'il a une durée de vie supérieur à 200 heures.

EXERCICE N°3: (3,5 points)

Dans **l'annexe 1 page 4**, on a représenté la courbe représentative (C), dans un repère orthonormé (O,$\vec{i}$,$\vec{j}$), qui passe par le point de coordonnées $(0,e)$ d'une fonction f qui est l'unique solution de l'équation différentielle (E) : y' + y = $2xe^{1-x}$ vérifiant f(1) = 2.

1°/ a) Ecrire l'équation de la tangente de la fonction f au point d'abscisse 1

b) Soit a un réel. Calculer $\int_a^1 xe^{(1-x)}dx$

c) En déduire l'aire du domaine du plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations x =0 et x= 1

2°/ Vérifier que la fonction g définie sur IR par $g(x) = x^2e^{(1-x)}$ est une solution de l'équation (E).

3°/ a) Soit h une fonction dérivable sur IR. Montrer que h est une solution de l'équation (E) si et seulement si (h – g) est une solution de l'équation différentielle (E') : y' + y = 0.

b) Calculer alors h(x) pour tout $x \in \mathbb{R}$.

4°/ Soit la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \int_1^{e^{(1-x)}} (1-\ln(t))^2\,dt$.

a) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b) Calculer alors $F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

c) Dresser alors le tableau de variation de la fonction F .

EXERCICE N°4 : (8 points)

Parti A : Soit f la fonction définie sur [0, +∞[par : $f(x) = \sqrt{e^{2x} - 1}$.

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O,$\vec{i}$,$\vec{j}$).

1°/a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter géométriquement le résultat.

b) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

c) Dresser le tableau de variation de f.

d) Vérifier que pour tout $x \in \left]0,+\infty\right[$, $f''(x) = \dfrac{e^{2x}(e^{2x}-2)}{\left(\sqrt{e^{2x}-1}\right)^3}$. En déduire que le point $A(\ln(\sqrt{2},1))$ est un point d'inflexion de (C) et donner une équation de la tangente (T) à (C) en A.

e) Sur la feuille Annexe on a représenté la courbe $(\Gamma): y = \ln x$. ***(Annexe N°2 page 4)*** Utiliser (Γ) pour construire A puis (T) et (C).

2°/a) Montrer que f réalise une bijection de [0, +∞[sur [0, +∞[.

b) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in [0,+\infty[$,

c) Tracer dans le même repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) la courbe représentative de la fonction f^{-1} .

3°/ Soit la fonction H définie [0, +∞[par $H(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$.

Montrer que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, on a $H(\tan x) = x$.

4°/ Pour tout $x \in [0,+\infty[$, on pose $F(x) = f(x) - Hof(x)$.

a) Montrer que F est dérivable sur]0, +∞[et calculer $F'(x)$.

b) En déduire que pour tout $x \in [0,+\infty[$, on a : $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.

5°/a) Calculer l'aire A de la partie du plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives x = 0 et x = $\ln(\sqrt{2})$.

b) En déduire la valeur de $\int_0^1 \ln(x^2+1)dx$

Partie B : Soit n un entier naturel non nul et soit $I_n = \int_0^{\ln(\sqrt{2})} f^n(t)dt$.

1°/ a) Vérifier que pour tout $n \in IN^*$ et pour tout $x \in [0,+\infty[$ $\left(f(t)\right)^n + \left(f(t)\right)^{n+2} = e^{2t}((f(t))^n$.

b) Montrer que pour tout n $n \in IN^*$, et pour tout $x \in [0,+\infty[$ la fonction $x \mapsto \frac{1}{n+2}\left(f(x)\right)^{n+2}$ est une primitive sur $[0,+\infty[$ de la fonction $x \mapsto e^{2x}\left(f(x)\right)^n$.

c) Montrer que pour tout entier naturel non nul, on a : $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+2}$.

d) Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

e) En déduire que la suite (I_n) est convergente et déterminer sa limite.

2°/ Soit $U_n = I_{n+4} - I_n$

a) Montrer que, par récurrence, que pour tout entier naturel non nul, on a : $U_n = \frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+2}$

b) Justifier que pour tout entier naturel non nul, on a : $\sum_{k=0}^{n} U_{4k+1} = I_{4n+5} - I_1$.

c) Exprimer U_{4n+1} en fonction de n.

d) Calculer alors $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

Pour une bonne réussite au baccalauréat

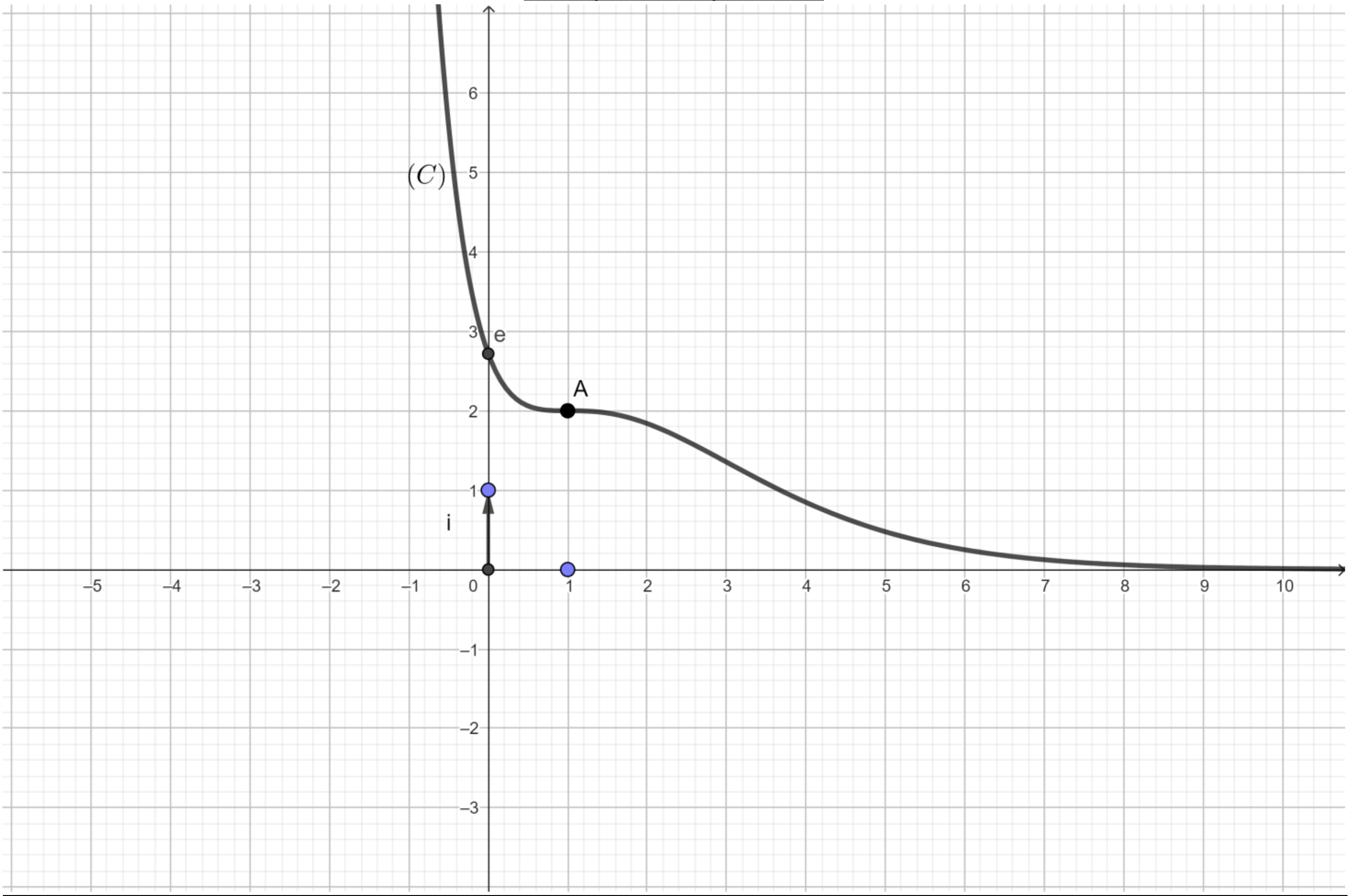
Croyez en vos rêves et il se réaliseront peut-être. Croyez en vous et ils se réaliseront surement.

Martin Luther king

Nom et Prénom :…………………………………   *Classe :…………….*

Epreuve : mathématiques - Section : 4eme Maths

Annexe N°1 : Exercice N°3



Annexe N°2 : Exercice N°4