4 Maths	**DEVOIR DE SYNTHESE N°3(Bac Blanc)**	09/05/2024
L.Sayada	**EPREUVE DE MATHEMATIQUES**	Durée 4 heures

Exercice 1 (4,5 points)

1) a) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E_0) : $z^2 - 2(2+3i)z - 5+10i = 0$.

b) Soit l'équation (E_1) : $z^3 - 3(3+2i)z^2 + 5(3+8i)z + 25(1-2i) = 0$.

Vérifier que 5 est une solution de l'équation (E_1).

c) Résoudre alors, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E_1).

2) On munit le plan complexe du repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ et on donne les points A, B, C, D et K d'affixes respectives $1+2i$, 5, $7+4i$, $3+6i$ et $4+3i$.

a) Faire une figure et montrer que ABCD est un carré de centre K.

b) Déterminer alors, géométriquement, le rapport et l'angle de la similitude directe S qui transforme B en C et K en D.

c) Montrer que l'écriture complexe de S est $z' = (1+i)z + 2 - i$, préciser son centre et calculer l'affixe de D'=S(D).

3) Soit l'application g= $S o S_{(BK)}$ où $S_{(BK)}$ est la symétrie orthogonale d'axe (BK).

a) Justifier que g est une similitude indirecte dont on précisera le rapport.

b) Déterminer l'image par g de chacun des points B, K, C et D.

c) En déduire une construction du centre W et de l'axe Δ de g.

d) Déterminer l'écriture complexe de g et calculer l'affixe de W.

Exercice 2(4 points)

l'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on désigne par (S_m) l'ensemble des points M(x, y, z) vérifiant l'équation :

$x^2+y^2+z^2 - 2(m+1)x - 2(m-1)y - 4z - 3 = 0$ où m est un paramètre réel.

1) a) Montrer que pour tout m ϵ IR, l'ensemble (S_m) est une sphère de centre $I_m(m+1, m-1, 2)$ et de rayon $R_m = \sqrt{2m^2+9}$.

b) Montrer que toutes les sphères passent par un cercle fixe que l'on déterminera.

2) Soit P le plan d'équation : $2x + 2y - z - 7 = 0$.

a) Déterminer, suivant les valeurs de m, la position relative de (S_m) et P.

b) Caractériser (S)∩P où (S) est la sphère (S_2) c'est-à-dire pour m=2.

c) Déterminer le plan Q parallèle à P et sécant à (S) suivant un grand cercle.

3) Soit t la translation de vecteur $\vec{u} = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath} - 2\vec{k}$.

a) Donner les expressions analytiques de la translation t.

b) Vérifier que $\vec{u}$ est un vecteur de P puis déduire l'image par t de Q .

c) Caractériser (S')∩Q où (S') est l'image par t de (S).

Exercice 3(4,5 points)

1) Soit n un entier naturel et $S_n = \sum_{k=0}^{n} 7^k = 1+7+7^2+\ldots+7^n$.

a) Déterminer, suivant les valeurs de n, le reste modulo 19 de 7^n.

b) Montrer que $6\, S_n = 7^{n+1} - 1$.

c) Soit u est un entier, montrer que :

$6\, S_n \equiv u (mod\ 19)$ si et seulement si $S_n \equiv -3u (mod\ 19)$.

d) En déduire que S_{2024} est divisible par 19.

2) Soit, dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation (E_n) : S_n x - 7^n y = 19 où n est un entier naturel.

a) Montrer que S_n et 7^n sont premiers entre eux et déterminer une solution (x_0, y_0) de l'équation (E_n).

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation (E_n).

c) Résoudre alors dans $\mathbb{Z}^2$, le système : $\begin{cases} 8x - 7y = 19 \\ x \wedge y = 19 \end{cases}$.

3) a) Soit a un entier, montrer que :

$a^2 \equiv 1 (mod\ 19)$ si et seulement si $a \equiv 1 (mod\ 19)$ ou $a \equiv -1 (mod\ 19)$.

b) Montrer alors que [1+18!] est divisible par 19.

Exercice 4(7 points) Partie A

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = \begin{cases} x\, e^{\frac{1-x}{2}} & si\ x < 1 \\ 1 + \frac{\ln x}{2x} & si\ x \geq 1 \end{cases}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.(unité graphique 2 cm)

1) a) Calculer $\lim_{x \to -\infty} f(x)$, $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement ces résultats.

b) Montrer que f est continue et dérivable en 1.

c) Calculer f '(x) sur chacun des intervalles]-∞, 1[et]1, +∞[puis dresser le tableau de variation de f.

2) Tracer la courbe (C_f) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.(Construire la tangente T au point d'abscisse 1)

3) Déterminer la primitive G_k de g_k : $x \longmapsto \frac{(\ln x)^k}{x}$ sur l'intervalle [1, +∞[qui s'annule en 1. En déduire la primitive F de f sur [1, +∞[qui s'annule en 1.
(k étant un entier naturel non nul)

Partie B

. Soit $I_0 = \int_0^1 e^{\frac{1-x}{2}} dx$ et pour tout n ϵ IN*, $I_n = \int_0^1 x^n e^{\frac{1-x}{2}} dx$.

1) a) Montrer que pour tout n ϵ IN, on a : $I_n \geq 0$.
b) Montrer que la suite (I_n) est décroissante.
2) a) Montrer que pour tout n ϵ IN, on a : I_{n+1} = -2 + 2(n+1) I_n .
b) Calculer I_0 puis déduire I_1 .
c) Calculer alors l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations x=0 et x=e.
3) a) Montrer que pour tout n ϵ IN, on a : $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{2}{2n+1}$.
b) Calculer alors, $\lim_{n\to+\infty} nI_n$.

Partie C

Pour tout n ϵ IN* et pour tout x ϵ]-∞, 1[, on note $f^{(1)}$=f ' et $f^{(n)}$ la fonction dérivée nième de f avec $f^{(n+1)}$ =[$f^{(n)}$]' et on considère la suite (u_n) définie sur IN* par $u_n = f^{(n)}(0)$.

1) a) Montrer que pour tout n ϵ IN*, on a : $f^{(n)}(x)$= (x-2n)$(\frac{-1}{2})^n e^{\frac{1-x}{2}}$.
b) Vérifier que $|u_n|$= 2n$(\frac{1}{2})^n\sqrt{e}$ puis déterminer $\lim_{n\to+\infty} u_n$.
2) Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n}[\frac{f^{(k)}(0)}{k}]$; n ϵ IN*.
a) Montrer que pour tout n ϵ IN*, on a : $S_n = \frac{2\sqrt{e}}{3}$ [1 - $(\frac{-1}{2})^n$].
b) Calculer alors $\lim_{n\to+\infty} S_n$.