



♥♥ Dream big, work hard, make it happen ♥♥ Bac 2k25 : Yes you can ♥♥

**Exercice 1 (3.5 points)**

Tous les résultats seront arrondis à 10^{-3} sauf indication contraire.

Un groupe de supporters d'une équipe de football a créé une association en 2017 avec 300 adhérents.

Le tableau ci-dessous donne l'évolution du nombre d'adhérents de l'année 2017 à l'année 2024.

Année	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024
Rang de l'année : X	1	2	3	4	5	6	7	8
Nombre d'adhérents : Y	300	380	475	623	737	814	926	1084

(A)

- 1 Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y .
- 2 Montrer qu'un ajustement affine par la méthode de Mayer est donnée par la droite d'équation : $y = 111,438x + b$ où b est un réel que l'on déterminera.
- 3 Donner une estimation du nombre d'adhérents en 2025.

(B) On pose $Z = \ln Y$, on obtient le tableau suivant :

Rang de l'année : X	1	2	3	4	5	6	7	8
$Z = \ln Y$	5,704	5,940	6,163	6,435	6,603	6,702	6,831	6,988

- 1 Donner un ajustement affine de Z en X par la méthode des moindres carrées.
- 2 En déduire l'expression de y en fonction de x .
- 3 En fait le nombre d'adhérents en 2025 est de 1400, quelle est l'ajustement le plus pertinent ?

(C) Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{2800}{1 + e^{-x}}$.

On suppose que le nombre d'adhérents en $2025 + n$ est $f(n)$, avec n un entier naturel.

- 1 Calculer la limite de f en $+\infty$ et interpréter le résultat obtenu.
- 2 Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0, 5]$ et interpréter le résultat obtenu.



Exercice 2 (4 points)

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 .

L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires,
et l'urne U_2 contient une boule blanche et trois boules noires.

- 1 On tire simultanément deux boules de U_1 et une boule de U_2 .
Toutes les boules sont indiscernables au toucher.
 - a Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
 - . A « Obtenir trois boules de même couleur »
 - . B « Obtenir trois boules de couleurs différentes »
 - b Soit l'événement C « il reste une seule boule blanche dans les deux urnes ».
Montrer que $p(C) = \frac{9}{40}$
- 2 Soit X la variable aléatoire qui correspond au nombre des boules blanches **restantes** dans les **deux urnes**.
 - a Déterminer la loi de probabilité de X.
 - b Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.
- 3 On gagne **a** dinars pour chaque boule blanche tirée et on perd sept dinars pour chaque boule noire tirée dans l'épreuve précédente.
On désigne par Y la variable aléatoire qui correspond au **gain algébrique**.
Déterminer la valeur de **a** pour que le jeu soit **équitable**.
- 4 On répète l'épreuve précédente n fois de suite ($n \geq 4$), en remettant chaque fois les boules tirées dans leur urne d'origine.
 - a Calculer la probabilité des événements suivants »
 - . E_1 « obtenir une seule fois trois boules de même couleur »
 - . E_2 « obtenir pour la deuxième fois trois boules de même couleur à la troisième tirage »
 - b On considère l'événement E_n « obtenir au moins deux fois trois boules de même couleur » et on note p_n la probabilité de (E_n) .
Montrer que $p_n = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \left(\frac{n+3}{4}\right)$.

**Exercice 3 (5 points)****I-**

- ① Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n le reste modulo 9 de 4^n .
- ② En déduire le reste de la division euclidienne de $4^{2025} + 4^{2026} + 4^{2027}$ par 9.
- ③ Déterminer l'ensemble des entiers naturels α tel que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :

$$\begin{cases} 4^n + 4^{n+1} + 4^{n+2} + \alpha + 4 \equiv 0 \pmod{9} \\ \alpha \equiv 2 \pmod{7} \end{cases}$$
- ④ Soit pour tout entier naturel n la somme $S_n = 3 \times 4 + 3 \times 4^2 + 3 \times 4^3 + \dots + 3 \times 4^{n+1}$. Écrire S_n en fonction de n , puis déterminer l'ensemble des entiers naturels n tel que S_n soit divisible par 36.

II- On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) $3x - 21y = 78$.

- ①
 - a) Montrer que si (x, y) est une solution de (E), alors $x \equiv 5 \pmod{7}$ puis résoudre l'équation (E).
 - b) En déduire la résolution du système $S : \begin{cases} 3x \equiv 78 \pmod{21} \\ 138 < x < 152 \end{cases}$
- ② Soit $d = x \wedge y$ tel que (x, y) est une solution de (E).
 - a) Déterminer les valeurs possibles de d .
 - b) Déterminer les couples (x, y) solutions de (E) tel que $d = 13$.
 - c) Déterminer les couples (x, y) d'entiers-naturels solutions de (E) tel que $4^x + 4^y \equiv 2 \pmod{9}$.

**Exercice 4 (7.5 points)**Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{e^{2x} - 1}$.On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

- ① Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement.
- ②
 - a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. Interpréter graphiquement.
 - b) Dresser le tableau de variation de f .
 - c) Vérifier que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f''(x) = \frac{e^{2x}(e^{2x} - 2)}{(\sqrt{e^{2x} - 1})^3}$.
En déduire que le point $I(\ln(\sqrt{2}), 1)$ est un point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}$.
 - d) Tracer la courbe $\mathcal{C}$.
- ③
 - a) Montrer que f possède une fonction réciproque f^{-1} définie sur $[0, +\infty[$.
 - b) Expliciter $f^{-1}(x)$, pour tout $x \in [0, +\infty[$.
 - c) Tracer, dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe $\mathcal{C}'$ représentative de la fonction f^{-1} .

- 4 Soit g la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ par $g(x) = \tan x$.
- Montrer que g réalise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $[0, +\infty[$.
On note g^{-1} sa fonction réciproque.
 - Montrer que g^{-1} est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que $(g^{-1})'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in [0, +\infty[$.
- 5 Pour tout $x \in [0, +\infty[$, on pose $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ et $G(x) = f(x) - g^{-1} \circ f(x)$.
- Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $F'(x) = G'(x)$.
 - Montrer alors que pour tout $x \in [0, +\infty[$, $\int_0^x f(t)dt = f(x) - g^{-1} \circ f(x)$.
 - Calculer l'aire $\mathcal{A}$ en unités d'aires de la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \ln(\sqrt{2})$.
- 6 Soit la suite (I_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $I_0 = \int_0^{\ln \sqrt{2}} dx$
et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^{\ln \sqrt{2}} (f(x))^n dx$
- Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [0, +\infty[$, $(f(x))^n + (f(x))^{n+2} = e^{2x}(f(x))^n$.
 - Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \mapsto \frac{1}{n+2}(f(x))^{n+2}$ est une primitive de la fonction $x \mapsto e^{2x}(f(x))^n$ sur $[0, +\infty[$.
 - Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+2}$.
 - Montrer que la suite (I_n) est décroissante et déterminer sa limite.
- 7 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $U_n = I_{n+4} - I_n$.
- Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n U_{4k+1} = I_{4n+5} - I_1$.
 - Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = (I_{n+4} + I_{n+2}) - (I_{n+2} + I_n)$.
En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+2}$.
 - Exprimer alors U_{4n+1} , en fonction de n .
 - Calculer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de la somme

$$S_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots - \frac{1}{4n+3} + \frac{1}{4n+5}.$$

BON TRAVAIL